Paradojas

14ª Semana Nacional de Ciencia y Tecnología
Universidad Tecnológica de la Mixteca

M.C. Verónica Borja Macías

Objetivo de la Conferencia

- Analizar algunas de las paradojas típicas.

  ¿Qué son las paradojas?

  ¿Por qué surgen?

  ¿Qué implican?

Paradojas

Definición

- Una **paradoja** es una declaración en apariencia verdadera que conlleva a una auto-contradicción lógica o a una situación que contradice el sentido común.
- En palabras simples, una paradoja es "lo opuesto a lo que uno considera cierto".
- La identificación de paradojas basadas en conceptos en apariencias razonables y simples ha impulsado importantes avances en la ciencia, filosofía y las matemáticas.

Definición

- Las primeras formas de la palabra aparecieron como la palabra del latín *paradoxum*, pero es encontrada también en textos griegos como *paradoxa*.
- Se encuentra compuesta por el prefijo *para-*, que significa "contrario a" o "alterado", en conjunción con el sufijo *doxa*, que significa "opinión".
- La paradoja del mentiroso y otras paradojas similares ya se estudiaron en la edad media bajo el título *insolubilia*.

Tipos de paradojas

- No todas las paradojas son iguales. No todas las paradojas encajan con exactitud en una única categoría. Pero entre ellas podemos mencionar dos categorías:

- **Según su veracidad y las condiciones que las forman :** Algunas paradojas sólo parecen serlo, ya que lo que afirman es realmente cierto o falso, otras se auto-contradicen, por lo que se consideran verdaderas paradojas, mientras que otras dependen de su interpretación para ser o no paradójica.

- **Según el área del conocimiento al que pertenecen:** Todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, que antiguamente se consideraba parte de la filosofía, pero que ahora se ha formalizado y se ha incluido como una parte importante de la matemática

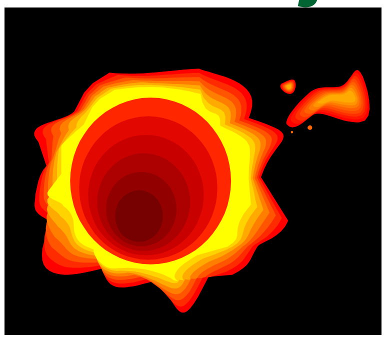
Tipos de paradojas

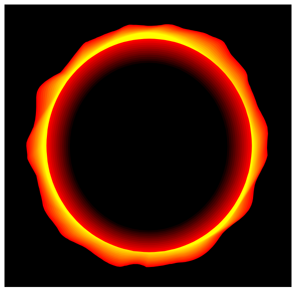
- Según su veracidad y las condiciones que las forman
  - Paradojas verídicas
  - Antinomias
  - Antinomias de definición
  - Paradojas condicionales
- Según el área del conocimiento al que pertenecen
  - Paradojas en Matemática / Lógica
    - Paradojas sobre la probabilidad y la estadística
    - Paradojas sobre lógica
    - Paradojas sobre el infinito
  - Paradojas en Física
  - Paradojas en Economía

Paradojas verídicas

- Son resultados que aparentan tal vez ser absurdos a pesar de ser demostrable su veracidad. A esta categoría pertenecen la mayor parte de las paradojas matemáticas.

- **Ejemplo: Paradoja de la banda esférica**



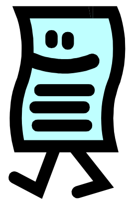


Enunciado:
Paradoja de la banda esférica

- Nos encontramos con una esfera perfectamente lisa con un millón de veces el tamaño de nuestro Sol. Una banda de acero abraza estrechamente a esta esfera alrededor del ecuador.

- A esta banda de acero se le agrega un metro, de manera que se eleve de la esfera a igual altura en todo su contorno.

- *¿Esto dejará la banda despegada de la esfera a una altura suficiente como para poder:*



a) ¿Deslizar un papel bajo la banda?

b) ¿Deslizar una mano bajo la banda?

c) ¿Deslizar una pelota de tenis bajo la banda?

Explicación:
Paradoja de la banda esférica

- La altura a la que se elevará la banda de la esfera es la misma independientemente del tamaño de la esfera, por muy grande que sea. El porqué de este hecho es el siguiente: Cuando la banda de la esfera está tensa alrededor de la esfera, es la circunferencia de un círculo con un radio que es el radio de la esfera. Sabemos a partir de la geometría plana que la circunferencia de un círculo es igual a su diámetro (que es el doble de su radio) multiplicado por el número π.

- π es 3'14159... es decir, ligeramente mayor que 3. Por tanto, si aumentamos la circunferencia de cualquier círculo en un metro, debemos incrementar el diámetro un poquito menos que el tercio de metro, es decir, algo más de 31 cm. Eso significa que **el radio aumentará 16 cm**.

- Esto funciona con esferas de cualquier tamaño, ya sean mil billones de veces el tamaño del Sol o del tamaño de una naranja.

Explicación:
Paradoja de la banda esférica

- **Matemáticamente esto se puede expresar como:**
- **L0**: Longitud circunferencia original
- **D0**: Diámetro del círculo original
- **L1**: Longitud circunferencia ampliada
- **D1**: Diámetro del círculo ampliado
- **π**: número pi (3.1415....)
- Entonces:
- $\mathbf{L0 = \pi \times D0}$ (1)
- $\mathbf{L1 = \pi \times D1}$ (2)
- $\mathbf{L1 = L0 + 1m}$ (3)
- Reemplazando L1 de la ecuación (3) en la ecuación (2) obtenemos:
- $\mathbf{L0 + 1m = \pi \times D1}$
- Reemplazando L0 de la ecuación (1) en la ecuación anterior obtenemos:
- $\mathbf{\pi \times D0 + 1m = \pi \times D1}$
- dividiendo por π ambos miembros de la igualdad
- $\mathbf{D0 + 1m/\pi = D1}$
- $\mathbf{D1 = D0 + 0.3183... m}$
- O sea el nuevo diámetro es unos 32 cm mayor que el original, independiente del diámetro.

Antinomias

- Son paradojas que alcanzan un resultado que se auto-contradice, aplicando correctamente modos aceptados de razonamiento. Muestran fallos en un modo de razón, axioma o definición previamente aceptados.

- **Ejemplo: Paradoja del mentiroso o la Paradoja de Berry**

Enunciado:
Paradoja del mentiroso

- Un cretense dice:

  “Los cretenses siempre mienten”.

- Supongamos que lo que dice es verdad:
  - entonces, en efecto, los cretenses siempre mienten;
  - entonces, como él es un cretense, lo que dice es mentira;
  - contradicción.
- Supongamos que lo que dice es mentira:
  - entonces hay algunos cretenses que a veces dicen la verdad.
- Hasta aquí, de hecho, no hay ninguna paradoja.

Explicación:
Paradoja del mentiroso

“Los cretenses siempre mienten”.

- Seamos un poco más radicales y supongamos que:
  - Sólo existe un cretense (aquél que dijo la frase).
  - Lo único que dijo, en toda su vida, fue la frase anterior.
- Entonces, si suponemos que ha mentido, tenemos un problema:
  - Entonces no es cierto que algunos cretenses a veces digan la verdad;
  - el único cretense que existe dijo una sola frase en toda su vida y nosotros estamos suponiendo que justamente esa frase ¡era una mentira!
- Contradicción.

Introducción:
Paradoja de Berry

- Hay números que se pueden representar por frases en español. Supongamos que listamos todas estas frases en orden, primero por su tamaño (en número de símbolos), luego alfabéticamente.

frase	número que representa
e	e = 2.71828182…
pi	π = 3 14159265…
uno	1
un medio	1/2
raíz de dos	√ 2

Símbolos: 'a', ... , 'z' (incluyendo vocales con acentos); y el espacio que en total son digamos: "34 símbolos distintos".

Enunciado:
Paradoja de Berry

- Consideremos el conjunto *B* de todos los números que se pueden representar con menos de ochenta símbolos.
- El conjunto *B*, por supuesto, es finito $(34)^{80}$.
- Sea *n* el primer número natural que no se puede representar con menos de ochenta símbolos.
- El número *n*, por supuesto, no es elemento de B ya que no puede representar con menos de ochenta símbolos.
- Pero observe que la frase:

"El primer número natural que no es representable con menos de ochenta símbolos"

Enunciado:
Paradoja de Berry

- Pero observe que la frase:

El_primer_número_natural_que_no_es

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 2324 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34

representable_con_menos_de

35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

ochenta_símbolos

61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76

- Tiene exactamente setenta y seis símbolos y, además, representa al número n.
- Así que como hay una frase que representa a n en menos de 80 símbolos, es elemento de B.

Explicación:
Paradoja de Berry

- Se suele aceptar que la paradoja de Berry y otras paradojas similares provienen de la interpretación de conjuntos de expresiones que se autorreferencian.

- De acuerdo con (Russell and Whitehead, 1910) estas paradojas "encarnan falacias de círculo vicioso". Resolver una de éstas paradojas significa localizar exactamente dónde comienza el error en el uso del lenguaje y restringirlo para evitarlas.

Explicación:
Paradoja de Berry

- Algunas expresiones de éste tipo no presentan la paradoja:

“El menor entero positivo que no se puede definir con menos de dos palabras.”

- Bajo cualquier uso razonable del idioma español describe al 31
- "Treinta y uno" son tres palabras y cualquier definición indirecta de ese número (como "el número de días en enero", o incluso "El menor entero positivo que no se puede definir con menos de dos palabras") tienen necesariamente dos o más palabras.

Antinomias de definición

- Estas paradojas se basan en definiciones ambiguas, sin las cuales no alcanzan una contradicción.

- **Ejemplo: Paradoja de sorites**

Enunciado:

Paradoja Sorites

- *¿En qué momento un montón de arena deja de serlo cuando se van quitando granos?*

- La **paradoja del montón** (o la paradoja sorites) es una paradoja que aparece cuando la gente utiliza el "sentido común" sobre conceptos vagos.
- Más específicamente, la paradoja se produce porque mientras el sentido común sugiere que los montones de arena tienen las siguientes propiedades, estas propiedades son inconsistentes:
  - Dos o tres granos de arena *no* son un montón.
  - Un millón de granos de arena *sí* son un montón.
  - Si n granos de arena *no* forman un montón, tampoco lo serán (n+1) granos.
  - Si n granos de arena son un montón, también lo serán (n−1) granos.

Explicación:
Paradoja Sorites

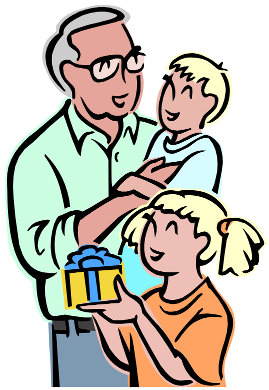
- Si se aplica la inducción matemática, se comprueba que la tercera propiedad junto con la primera implican que un millón de granos de arena *no* forman un montón, contradiciendo la segunda propiedad. De modo análogo, combinando la segunda y la cuarta propiedad se demuestra que dos o tres granos *sí* son un montón, contradiciendo la primera propiedad.

- ¿Qué produce esta contradicción?
- Lo que muestra la paradoja es que las ideas de que es un montón y que no es un montón son contradictorias.

Paradojas condicionales

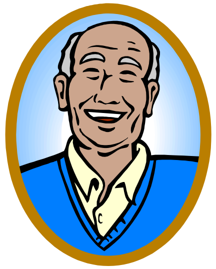
- Sólo son paradójicas si se hacen ciertas suposiciones. Algunas de ellas muestran que esas suposiciones son falsas o incompletas. .

- **Ejemplo: Paradoja del abuelo**



Enunciado:

Paradoja del abuelo



- La **paradoja del viaje en el tiempo**, o paradoja del abuelo es una paradoja que se cree expresada por primera vez por el escritor francés de ciencia ficción René Barjavel en su libro *Le voyageur imprudent* (*El viajero imprudente*, 1943).

- Se parte del supuesto que una persona realiza un viaje a través del tiempo y mata al padre biológico de su padre/madre biológico (abuelo del viajero), antes de que éste conozca a la abuela del viajero y puedan concebir.

- Entonces, el padre/madre del viajero nunca habrá sido concebido, de tal manera que no habrá podido viajar en el tiempo; al no viajar al pasado su abuelo entonces no es asesinado, por lo que el hipotético viajero sí es concebido; entonces sí puede viajar al pasado y asesinar a su abuelo, pero entonces no sería concebido..., y así indefinidamente

Explicación:
Paradoja del abuelo

- Esta paradoja ha sido usada para argumentar que el viaje hacia atrás en el tiempo debe ser imposible. Sin embargo, en la ciencia ficción se han sugerido algunas soluciones.
- *La máquina del tiempo* se sugiere que los actos que ocurren en el universo son inevitables y suceden en todas sus líneas temporales. Así, la mujer del protagonista muere de muchas maneras diferentes en cada uno de los viajes al pasado de éste.
- *Terminator* donde un integrante de la resistencia contra los robots viaja al pasado para proteger a la futura madre del líder de la resistencia, y termina engendrando con ella (Sara Connor) al futuro líder John Connor.
- Volver al Futuro con Marty McFly quien ha viajado al futuro y adquiere un almanaque deportivo con los resultados de los últimos 30 años que éste había comprado, para acto seguido, viajar al pasado en De Lorean volador de Emmett L. Brown y entregárselo a sí mismo de joven.
- Dejá vù donde el protagonista Doug Carlin consigue viajar al pasado para salvar a una chica. Se crea un futuro alternativo y al final Doug consigue salvar a la chica, pero acaba muriendo en una explosión de un coche que había caído al agua con ellos dos dentro. Cuando la chica es rescatada, los agentes de policía le dicen que llegará alguien a hablar con ella, y en ese momento aparece el Doug Carlin del pasado

Paradojas sobre la probabilidad y la estadística

- Son paradojas que involucran el cálculo de alguna probabilidad cuyo resultado contradice la intuición .

- **Ejemplo: Paradoja Monty Hall**

Enunciado:

Problema de Monty Hall (La Catapixia de Chabelo)

El concursante en el concurso televisivo es requerido para elegir una puerta entre tres (todas cerradas), y su premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la puerta elegida. Se sabe cierto que una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra.

Una vez que el concursante ha elegido una puerta y le comunica al público y al presentador su elección, el presentador abre una de las otras puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante de cambiar si lo desea de puerta (tiene dos opciones)

¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

Explicación:
Problema de Monty Hall

- La Probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad la puerta que oculta el coche es de 1/3, por lo que la probabilidad de que el coche se encuentre en una de las puertas que no ha escogido es de 2/3. ¿Qué cambia cuando el presentador muestra una cabra tras una de las otras dos puertas?

- Una suposición errónea es que, una vez sólo queden dos puertas, ambas tienen la misma probabilidad (un 50%) de contener el coche. Es errónea ya que el presentador abre la puerta *después* de la elección de jugador. Esto es, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador.

Explicación:
Problema de Monty Hall

- Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche, entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas donde hay cabras.
- Si el jugador escoge una cabra en su primera opción, el presentador sólo tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, la puerta restante tiene que contener el coche, por lo que si el jugador cambia entonces gana.
  - Si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3)
  - Si cambia, gana si escogió originalmente una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3).
- Por lo tanto, el concursante debe cambiar su elección si quiere maximizar la probabilidad de ganar el coche.

Explicación:
Problema de Monty Hall

- Lo que muestra el presentador no afecta la elección original, sino sólo a la otra puerta no escogida.

- Una vez que se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de dos puertas tenía una probabilidad de contener el coche de 2/3, entonces, si una tiene una probabilidad de 0, la otra debe tener una probabilidad de 2/3.

Explicación:

Problema de Monty Hall

- La elección, básicamente, consiste en preguntarte si prefieres seguir con tu puerta original o escoger *las otras dos puertas*. La probabilidad de 2/3 se traspasa a la otra puerta no escogida (en lugar de dividirse entre las dos puertas restantes de modo que ambas tengan una probabilidad de 1/2)

- Si el presentador escogiese al azar entre las dos puertas con cabras (incluyendo la del concursante), abriese una de ellas y luego diese de nuevo a elegir, entonces las dos puertas restantes sí tendrían la misma probabilidad de contener el coche.

Paradojas sobre lógica

- A pesar de que todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, hay algunas que afectan directamente a su bases y postulados tradicionales.

- Las paradojas más importantes relacionadas directamente con el área de la lógica son las antinomias, como la paradoja de Russell, que muestran la inconsistencia de las matemáticas tradicionales. A pesar de ello, existen paradojas que no se auto-contradicen y que han ayudado a avanzar en conceptos como demostración y verdad.

- **Ejemplo: Paradoja del cuervo**

Enunciado:
Paradoja del cuervo

- Fue propuesta por el filósofo alemán Carl Hempel en la década de 1940 para ilustrar un problema donde la lógica inductiva desafía a la intuición.
- Propone como teoría "Todos los cuervos son negros". Si ahora examinamos a un millón de cuervos, y observamos que todos son negros, nuestra creencia en la teoría "todos los cuervos son negros" crecerá ligeramente con cada observación.
- Ahora bien, la afirmación "todos los cuervos son negros" es equivalente en lógica a la afirmación "todas las cosas no-negras son no-cuervos".
- Por lo tanto, si observamos una manzana roja, es consistente con esa segunda afirmación. Una manzana roja es una cosa no-negra, y cuando la examinamos, vemos que es un no-cuervo. Así que, por el principio de inducción, el observar una manzana roja ¡debería incrementar nuestra confianza en la creencia de que todos los cuervos son negros!

Explicación:
Paradoja del cuervo

- El lógico americano Nelson Goodman ha sugerido añadir restricciones a nuestro propio razonamiento.
- Otros filósofos han cuestionado el "principio de equivalencia".
- Algunos filósofos han defendido que es nuestra intuición la que falla.

Explicación:
Paradoja del cuervo

- Observar una manzana roja realmente incrementa la probabilidad de que todos los cuervos sean negros.

- Después de todo, si tuviéramos el conjunto de todas las cosas no-negras del universo, y pudiéramos ver que no hay ningún cuervo entre ellas, se podría concluir entonces que todos los cuervos son negros.

- El ejemplo solo desafía a la intuición porque el conjunto de cosas no-negras es más grande que el conjunto de cuervos. Así, observar otra cosa no-negra que no sea un cuervo cambia muy poco nuestra creencia en la teoría si lo comparamos con la observación de otro cuervo que sí sea negro.

Paradojas sobre infinito

- El concepto matemático de infinito, al ser contrario a la intuición, ha generado muchas paradojas desde que fue formulado.

- **Ejemplo: Paradoja del hotel infinito**

Paradoja del hotel infinito

- Es una metáfora inventada por el matemático alemán David Hilbert, para explicar las paradojas relacionadas con el infinito descubiertas por el también matemático Georg Cantor, de una manera sencilla.

El hotel infinito

- Dos grandes hoteleros que querían construir el hotel más grande del mundo se reunieron a dialogar sobre el asunto y comenzaron por el primer y más obvio tema a discutir: cuántas habitaciones tendría.

- *"—¿Qué te parece si construimos un hotel con 1000 habitaciones?*
- *—No, porque si alguien construyera uno de 2000 habitaciones, nuestro hotel ya no sería tan grande. Mejor hagámoslo de 10 000.*
- *—Pero podría ser que alguien construyera uno de 20 000 y volveríamos a quedarnos con un hotel pequeño. Construyamos un hotel con 1 000 000 de habitaciones, ése sería un hotel grande.*
- *—Y qué tal si alguien construyera uno con..."*

- Como siempre podría llegar a haber un hotel más grande, llegaron a la conclusión de que era necesario hacer un hotel con habitaciones infinitas de manera que ningún otro hotel del mundo pudiera superar su tamaño.

Infinito mas uno

- Tan pronto se abrieron las puertas de este hotel la gente comenzó a abarrotarlo y pronto se encontraron con que el hotel de habitaciones infinitas se encontraba lleno de infinitos huéspedes.

- En este momento surgió la primera paradoja, así que se tomó como medida que los huéspedes siempre tendrían habitación asegurada pero con el acuerdo previo de que tendrían que cambiar de habitación cada vez que se les pidiera.

- Fue entonces cuando llegó un hombre al hotel pero éste se encontraba lleno, por supuesto esto no preocupó al cliente pues en el *Hotel Infinito* se aseguraba que todos tendrían habitación, el hombre pidió su habitación y el recepcionista, consciente de que no habría ningún problema, tomó un micrófono por el que avisó a todos los huéspedes que por favor revisaran el número de su habitación, le sumaran uno y se cambiaran a ese número de habitación, de esta manera el nuevo huésped pudo dormir tranquilamente en la habitación número 1.

- Pero, ¿qué pasó entonces con el huésped que se encontraba en la última habitación? Sencillamente no hay última habitación....

Dos infinitos

- Estando el hotel lleno de infinitos huéspedes, llegó un representante de una agencia de viajes con el corazón en la mano, su problema era que tenía una excursión de infinitos turistas que necesitarían hospedarse esa noche en el hotel. Se trataba por lo tanto de hacer sitio a infinitos huéspedes en un hotel con infinitas habitaciones, todas ellas ocupadas en aquellos momentos.

- El recepcionista no tuvo ningún problema en aceptar a los nuevos turistas. Cogió el micrófono y pidió a todos los huéspedes que se mudaran a la habitación correspondiente al resultado de multiplicar por 2 el número de su habitación actual.

- De esa forma todos los huéspedes se mudaron a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedaron libres. Como hay infinitos números impares, los infinitos turistas pudieron alojarse sin más problema.

Infinito numero de infinitos

- Estando el hotel lleno con infinitos huéspedes, llegó otro representante de la agencia de viajes aún más preocupado que el primero y avisó al primero el gran problema que había ocurrido, ahora la agencia tenía un infinito número de excursiones con un infinito número de turistas cada una. *"¡Qué enorme problema se presenta ahora!"*, pensaban los representantes de la agencia de viajes, ¿cómo podrían hospedar a un número infinito de infinitos turistas?

- El recepcionista permaneció inmutable, por lo cual tomó tranquilamente el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo o alguna potencia de éstos, les pidió que elevaran el número 2 al número de la habitación (n) en la que se encontraban ($2n$) y se cambiaran a esa habitación.

Infinito numero de infinitos

- Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo (mayor de 2), a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número impar, de manera que la habitación de cada uno de los turistas, se calculaba tomando el número primo de su excursión p y elevarlo al número que les tocó dentro de su excursión t lo que da p^t.

- Como existe un número infinito de números primos y un número infinito de números impares, fácilmente se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que sólo tiene un número infinito de habitaciones.

Conclusiones

Conclusiones

- Las Matemáticas pueden ser tan divertidas y entretenidas como nosotros queramos que sean. No son una teoría ideal, estática, completa, perfecta y falta de error, que está esperando a ser descubierta.

- La lógica estudia el razonamiento y es una ciencia en construcción que, motivada por modelar el fenómeno del razonamiento, su correctez y por abstraer propiedades formales de este, se ha estado inventando poco a poco.