Ejercicios
Materia: Tópicos de Matemáticas Aplicadas
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 2021-2022 B
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 30 de junio de 2023

1. Demuestre que la forma de Bolza de un problema de control puede llevarse a la forma de Mayer.

2. En el modelo de publicidad

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & J = \int_0^\infty [\pi(G(t)) - u(t)]e^{-\rho t}\, dt \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} \dot{G}(t) = u(t) - \delta G(t), \\ G(0) = G_0, \\ \ 0 \leq u(t) \leq Q, \end{cases} \end{aligned}$$

   sea $\pi(G) = 2\sqrt{G}$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0.3$, $Q = 2$ y $G_0 = 16$. Sea $u(t) = 0.8$ para $t \geq 0$. Demuestre que $G(t)$ es constante para cada t. Calcule el valor del objetivo.

3. Considerando la condición

$$0 = \max_{u \in \Omega(t)} \{H + \tfrac{dV}{dt}\}$$

   transponga a $\frac{dV}{dt}$ en el óptimo, derive respecto a x y obtenga de nuevo la ecuación adjunta.

4. Resuelva las tres ecuaciones diferenciales definidas por

$$\dot{x} = x + u = \begin{cases} x + 2, & e^{2-t} - 5/2 > 2, \\ x + e^{2-t} - 5/2, & 2 \geq e^{2-t} - 5/2 \geq 0, \\ x, & 0 > e^{2-t} - 5/2 \end{cases}$$

   que dan x^* en el ejemplo de la clase, y construya la gráfica de la trayectoria óptima de estados. Calcule el valor del objetivo.

5. Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ x(0) = x_0, \\ \ -1 \leq u(t) \leq 1, \end{cases}$$

   demuestre que su conjunto alcanzable $\mathcal{C}$ es conectable por trayectorias.

6. Dado el sistema con estados $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ que satisface

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

determine si es controlable. Estudie la controlabilidad del sistema si se cambia a $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lo mismo si se cambia a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Se sabe que si un sistema es bidimensional entonces cualquier control *bang-bang* tiene a lo más un "cambio" de extremo cuando la matriz M en $\dot{x} = Mx + Nu$ tiene todos sus autovalores reales. Determine una condición sobre a y ω para que el problema de control

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \int_0^T dt,$$
$$\text{s. a} \begin{cases} \ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t) - \omega^2 x(t) + u(t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0, \\ x(T) = \dot{x}(T) = 0, \\ -1 \leq u(t) \leq 1 \end{cases}$$

tenga un control de tipo *bang-bang* con a lo más un cambio. *Sugerencia:* vale la pena definir la variable $y(t) = \dot{x}(t)$.

8. Resuelva el problema de control con objetivo cuadrático

$$\min \int_0^T \mu(x(t))^2 \, dt,$$
$$\text{s. a} \begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t), a, b \geq 0 \\ x(0) = x_0, \\ x(T) = x_T; \end{cases}$$

escriba la matriz hamiltoniana, la trayectoria de estados y el control óptimo en términos de la transformación de Laplace.

9. Considere el problema

$$\min \quad J = \sum_{k=0}^{T-1} |u^k|$$
$$\text{s. a} \begin{cases} \Delta x^k = Ax^k + bu^k, \\ x^0, x^T \text{ dados}, \\ -1 \leq u^k \leq 1, \end{cases}$$

donde A es una matriz arbitraria de $n \times n$. Escriba el lagrangiano, el hamiltoniano, la ecuación adjunta y la forma del control óptimo.

10. Resolver de nuevo el problema de mercadeo planteado suponiendo ahora que la invertir m unidades monetarias se incrementa en una unidad la buena fama. Es decir, el objetivo es ahora

$$\max_{0 \le u \le M} J = \int_0^\infty e^{-\rho t}(\pi(G) - mu)\, dt.$$

La dinámica es la misma (es decir, $\dot{G} = u - \delta G$, $G(0) = G_0$). ¿Cómo queda la relación de Jacquemin?

11. Resuelva de nuevo el problema de control estocástico de inventarios pero ahora con el objetivo

$$\min J = E\left(\int_0^T \left[\tfrac{h}{2}(I - \hat{I})^2 + \tfrac{c}{2}(P - \hat{P})^2\right]\right), h, c > 0, \hat{I}, \hat{P} \ge 0,$$

donde h es el costo de mantenimiento, c es el costo de producción, $\hat{I}$ es la meta de inventario y $\hat{P}$ es la meta de producción. La dinámica es la misma: $dI_t = (P_t - S)dt + \sigma dZ_t$, I_0 está dado.

12. En los siguientes juegos escriba su matriz, encuentre sus valores inferior y superior y, si tiene un equilibrio, encuéntrelo.

    a) El juego de piedra, papel y tijeras, donde la victoria vale 1, el empate 0 y la derrota -1.

    b) El juego donde A puede jugar A_1 o A_2 y B puede jugar B_1, B_2 o B_3. Si A juega A_1 entonces gana 0.9, 0.4 y 0.2, respectivamente, mientras que si juega A_2 gana 0.5, 0.5 y 0.8, respectivamente.

13. En el juego de dos países, y respecto a la primera matriz del juego, suponga que por medio de amenaza de sanciones se eleva a -1.5 la ganancia de A al no escalar el conflicto cuando B no lo escala. Queda como sigue.

A \ B	Escalar	No escalar
Escalar	1	2
No escalar	-1	-1.5

Encuentre la estrategia mixta óptima y el valor del juego en este caso.

14. Simplifique la matriz del siguiente juego eliminando jugadas por dominancia y resuélvalo por medio del método gráfico.

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	3	4
A_2	2	1	2	3
A_3	1	1/2	1	2
A_4	2	3/2	2	3

15. Resuelva los siguientes juegos en estrategia mixta usando programación lineal. Determine el valor del juego.

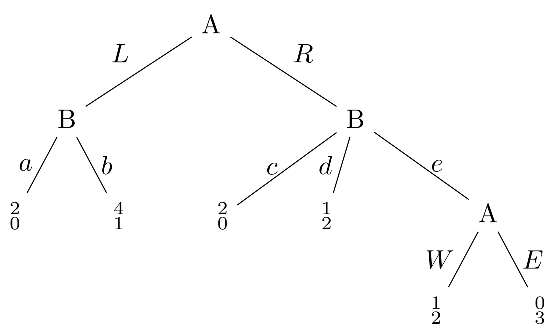
    a) El juego de piedra, papel y tijeras.

    b) El juego con la siguiente matriz.

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	4	4	2
A_2	1	5	3	2	1
A_3	2	4	3	1	5

    No reduzca por dominancia previamente.

16. Considere el siguiente juego de información perfecta (los resultados coinciden con la utilidad para los jugadores). La utilidad de A aparece arriba y la de B abajo.



    a) Aplique el algoritmo de marcha hacia atrás para encontrar todas las soluciones posibles.

    b) Escriba el juego en forma de matriz de pagos.

    c) Encuentre todos los equilibrios de Nash. ¿Cuáles no se pueeden obtener por medio del algoritmo?

17. Considere el juego de dos jugadores con matriz de pagos como sigue.

A \ B	L	R
U	$3, -2$	$1, 1$
D	$1, 2$	$4, -1$

Considerando además que la ganancia mixta óptima de ambos jugadores se da cuando no importa qué estrategia pura tome el otro jugador, escriba la utilidad esperada con estrategias mixtas $(p, 1-p)$ para A y $(q, 1-q)$ para B, iguale según la respuesta del contrario y encuentre el equilibrio de Nash. Calcule la utilidad esperada para cada jugador.

18. Una compañía farmacéutica va a invertir en un laboratorio de investigación de una universidad. Puede optar por una inversión grande o por una pequeña. Si la inversión grande falla, entonces pierde 2000 horas de su personal, mientras que si falla la pequeña entonces pierde 150 horas. Por otra parte, si resulta exitosa la inversión grande entonces obtendrá 10000 horas de mano de obra subcontratada y capacitación, mientras que si es exitosa la inversión pequeña obtendrá 8000 horas. Suponga que la probabilidad de éxito de la inversión grande es p, y la de la pequeña q. Construya una tabla para examinar las alternativas según los criterios maximin, de máxima verosimilitud y probabilista y encuentre una condición en este último caso que decida entre las alternativas. ¿Cuál es el umbral de probabilidad de éxito de la inversión a gran escala incluso si el éxito de la inversión pequeña es seguro?

19. Suponga que la compañía farmacéutica del ejercicio anterior contrata a un especialista para evaluar la probabilidad de éxito de la inversión a gran escala con un costo de 500 horas. Se sabe en general que la capacidad de un experto para predecir correctamente dicho éxito es de 0.6, y de que prediga correctamente que fallará es de 0.5.

    a) Construya un árbol de decisión respecto al éxito de la inversión a gran escala según la opinión del experto. Suponga que la probabilidad de éxito estimada inicialmente es del 90 %.

    b) Evalúe la pertinencia de invertir en la opinión del experto con los criterios de información perfecta y de valor esperado del experimento.

20. Durante la pandemia de la covid-19 se pudo plantear el modelo de crecimiento de la población infectada como uno hiperlogístico

$$\frac{dN}{dt} = rN^{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right)^{\beta}. \qquad \text{(Blumberg, 1968)}$$

    a) Suponga que β es un entero positivo. ¿Cómo cambian los equilibrios del modelo dependiendo del valor de β?

    b) Ubique el punto donde es máximo la velocidad de crecimiento de contagios. ¿Sirve para estimar los parámetros α y β si K y r son conocidos? Explique.

21. Suponga que la interacción entre dos especies está modelada según

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{t} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1 + b_{1,2} N_2}\right), \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2 + b_{2,1} N_1}\right). \end{cases}$$

Desdimensionalice y dibuje las configuraciones de las ceroclinas. Calcule el jacobiano y estudie las características de cada equilibrio con sus implicaciones ecológicas.

22. Considere el modelo epidemiológico

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\gamma \frac{SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \gamma \frac{SI}{N} - \alpha I, \\ \frac{dN}{dt} = -(1-f)\alpha I, \end{cases}$$

donde $N = I + S$, los compartimientos son S para los susceptibles e I para los infectados y $\alpha, \gamma > 0$, $0 < f < 1$.

a) Demuestre que $R_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (es decir, es independiente de N) y que $r = \gamma - \alpha$.

b) Demuestre que para $0 \leq \sigma \leq t \leq \infty$ se satisface

$$\frac{S(t)}{S(\sigma)} = \left(\frac{N(t)}{N(\sigma)} \right)^{\frac{R_0}{1-f}}.$$

En particular

$$\frac{S(t)}{S_0} = \left(\frac{N(t)}{N_0} \right)^{\frac{R_0}{1-f}}.$$

Sugerencia: mire a $\frac{dS}{dN}$.

23. A una población se le divide en 3 estratos, donde es reproductivo solo el segundo. Por lo tanto f_0, $f_1 = 1{,}05$, $f_2 = 0$. Las tasas de supervivencia son $p_0 = 0.9$, $p_1 = 0.4$.

a) Escriba la matriz de Leslie L y calcule 5 proyecciones de población a partir de la población inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$. Grafique los resultados.

b) Calcule los autovalores de L y encuentre el crecimiento poblacional.