Ejercicios
Materia: Tópicos de Matemáticas Aplicadas
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 2021-2022 B
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 9 de junio de 2022

1. En el problema de inventario, supóngase que
$$h = 15, c = 22, T = 10, I_0 = 1000,$$
$$P_{\min} = 600, P_{\max} = 1200, I_{\min} = 800, S(t) = 900 + 10t.$$
   a) Sea $P(t) = 1000[0 \le t \le 10]$. Determine si este control es factible. Si lo es, entonces calcule el valor del objetivo.
   b) Sea $P(t) = 850[0 \le t \le 10]$, entonces muestre que la restricción en el estado no se cumple y, por lo tanto, el control no es factible.
   c) Si $P(t) = 800[0 \le t \le 2] + 1200[2 < t \le 10]$, entonces muestre que el control no es factible.
2. Demuestre que la forma de Bolza se puede reducir a la de Lagrange de un problema de control óptimo.
3. Demuestre que si $u^*(t)$ es un control óptimo y $x^*(t)$ es la trayectoria de estados correspondiente para $0 \le t \le T$, con $x(0) = x_0$, entonces $u^*(t)$ para $\tau \le t \le T$ satisface el principio del máximo para el problema de control con tiempo inicial τ y condición inicial $x(\tau) = x^*(\tau)$.
4. Dado el problema de control óptimo
$$\begin{aligned} \max \quad & J = -\frac{1}{4}\int_0^1 u^4\,dt, \\ \text{s. a} \quad & \dot{x} = x + u, \\ & x(0) = x_0, \\ & x(1) = 0, \end{aligned}$$
   use el principio del máximo para demostrar que el control óptimo es
$$u^*(t) = \frac{4x_0}{3}(e^{-4/3} - 1)^{-1}e^{-t/3}.$$
5. Dado el control óptimo
$$u^*(t) = 2[e^{2-t} - 5/2 > 2] + (e^{2-t} - 5/2)[0 \le e^{2-t} - 5/2 \le 2]$$

del problema

$$
\begin{aligned}
\max \quad & J = \int_0^2 (2x - 3u - u^2)\, dt, \\
\text{s. a} \quad & \dot{x} = x + u, \\
& x(0) = 5, \\
& u \in [0, 2] = \Omega(t),
\end{aligned}
$$

escriba la trayectoria de estados considerando la definición por trozos de u^*. *Nota*: de ser posible, encuéntrela explícitamente en cada intervalo.

6. Demuestre que, dado un sistema

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Mx + Nu, \\
x(0) = x_0, \\
u(t) \in [-1, 1]^m,
\end{cases}
$$

si el *gramiano de controlabilidad*

$$
W(t) = \int_0^t e^{-Ms} N N^T e^{-M^T s}\, ds
$$

es definido positivo y $\Re\lambda \leq 0$ para cualquier autovalor λ de M, entonces el sistema es controlable.

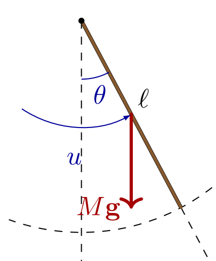
7. Determine si el sistema

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} u, \\
x(0) = x_0, \\
u(t) \in [-1, 1]^m
\end{cases}
$$

es controlable usando la matriz de controlabilidad.

8. Sean u_1 y u_2 controles *bang-bang* distintos. Demuestre que cualquier combinación convexa no trivial de ellos no puede ser *bang-bang*.

9. Considere un péndulo rígido de masa M y longitud ℓ con momento de inercia J alrededor del pivote, el cual es controlado por un momento u.



a) Considerando la segunda ley de Newton

$$J\ddot{\theta} = N,$$

donde N es el momento total aplicado al péndulo y θ es el ángulo respecto a la vertical del péndulo, encuentre la ecuación de estado del sistema.

b) Considere que, para ángulos pequeños, $\text{sen}(\theta) \approx \theta$. Use esto para escribir la ecuación del inciso anterior en forma matricial y determine si el sistema es controlable.

c) Si el control estuviera restringido a $[-1, 1]$ entonces ¿sigue siendo controlable el sistema?

10. Dado el problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \frac{1}{2}\int_0^T (\mu x^2(t) + \rho u^2(t))\, dt, \\ \text{s. a} \quad & \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \\ & x(0) = x_0, \end{aligned}$$

escriba su matriz hamiltoniana, la trayectoria de estados y el control óptimos en términos de transformaciones inversas de Laplace apropiadas.

11. Considere el juego donde A y B tienen tres cartas '0', '1' y '-1'. Cada uno juega una carta, el resultado se suma y, si es positivo, entonces se paga a A la cantidad en valor absoluto; mientras que, si es negativo, entonces se paga a B en valor absoluto.

a) Encuentre la matriz de pagos del juego.

b) Calcule su valor mínimo y máximo.

c) ¿Tiene solución el juego? ¿Es única? ¿Cuál es la combinación de estrategias óptimas, si es que existe?

12. Sea el juego donde A tiene una moneda de \$2 y B de \$1. Ambos ponen su moneda en la mesa con águila o sol hacia arriba. Si coinciden en águla o sol, entonces A pierde su moneda. Si no coinciden entonces B entrega su moneda a A solamente si A sacó águila.

a) Plantee la matriz de pagos del juego.

b) Resuélvalo encontrando la estrategia mixta óptima. Encuentre el valor del juego.

13. Resuelva el juego de los aviones y las armas. Recuerde que la matriz de pagos era como sigue:

$A\backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0.9	0.4	0.2
A_2	0.3	0.6	0.8
A_3	0.5	0.7	0.2

14. Sea el juego con matriz de pagos

$A\backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	3	2	5	2
A_2	2	1	4	3	1
A_3	1	0	2	1	0.

   a) Reduzca la matriz eliminando estrategias dominadas por otras.

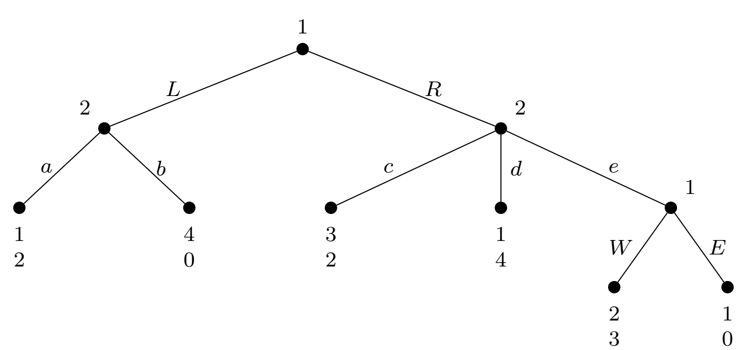
   b) Resuelva el juego resultante por el método gráfico.

15. En una compañía, un empleado que debía ser promovido realiza una acción que hace que ésta pierda mucho dinero. La decisión sobre las consecuencias de esto queda en manos de 3 directivos, que tienen las siguientes valoraciones sobre la decisión.

Directivo	Decisión		
	Despedir	Conservar	Promover
A	Mejor	Media	Peor
B	Peor	Mejor	Media
C	Media	Mejor	Peor

   Supóngase que cada directivo emite su opinión inambiguamente al resto y que hay el siguiente procedimiento: A propone la acción. Si la acepta B, entonces se considera tomada. Si no la acepta, entonces C toma la resolución final (que puede ser cualquiera de las tres acciones). Construya el árbol de decisión correspondiente.

16. Considere el siguiente árbol de decisión.



   a) Encuentre las soluciones por el algoritmo de marcha hacia atrás.

b) Escriba todas las estrategias del jugador 1.

c) Escriba todas las estrategias del jugador 2.

d) Escriba el juego como matriz de pagos y encuentre los equilibrios de Nash.

17. Un paciente requiere un transplante. Si no se lo realiza, entonces esperaría vivir unos 3 años. Si se lo realiza, entonces con un 85 % de probabilidad es exitoso, y con un 15 % de probabilidad fracasa y vive solamente un año más. Si el transplante es exitoso entonces, si lleva el tratamiento correctamente con un 95 % de probabilidad vive 20 años más; de lo contrario, con un 5 % de probabilidad morirá a los 5 años. Supongamos que la utilidad de vivir 20 años con el transplante es 1; la de 5 años es 0.2 y la de 1 año es 0.1.

    a) Dibuje el árbol de decisión.

    b) Calcule las utilidades esperadas pertinentes.

    c) ¿Cuál debe ser la utilidad de vivir 3 años sin realizarse el transplante para que se prefiera a realizarlo?

18. Una editorial puede o bien reeditar un libro de texto famoso o bien comisionar uno nuevo. La probabilidad del resultado en ventas es como sigue para un libro estándar.

Resultado	Probabilidad	Utilidad ($)
Mejor vendido	0.3	1.25
Venta promedio	0.4	1.00
Venta sin ganancia	0.2	0.00
Pérdida	0.1	−2.00

Por estudios de mercado previos se sabe que, al lanzar un nuevo libro para el que se hacen las reseñas preliminares, se tienen los siguientes resultados.

Resultado	Probabilidad
Mejor vendido recibe reseña favorable	0.84
Venta promedio recibe reseña favorable	0.58
Venta sin ganancia recibe reseña favorable	0.36
Pérdida recibe reseña favorable	0.28

a) Construya el árbol de decisión.

b) Con el cálculo de las probabilidades a posteriori ¿es conveniente comisionar un nuevo libro de texto?

19. *a*) Definiendo la variable

$$y = e^{2(t-T)}$$

y recordando que la sustitución $\rho = R - 2S$ que lleva a

$$\dot{\rho} + \rho Q = 0, \rho(T) = B - 2S,$$

demuestre que

$$\ln(\rho(T)) - \ln(\rho(t)) = -\int_t^T Q(\tau)\, d\tau$$

y que esto se puede simplificar a

$$R = 2S + \frac{2(B - 2S)\sqrt{y}}{y + 1}.$$

b) Demuestre que el control óptimo del modelo de inventario visto en clase está dado por

$$u^* = \frac{V_x}{2} = S + \frac{(y - 1)x + (B - 2S)\sqrt{y}}{y + 1}.$$

20. Sea el sistema dinámico discreto

$$\begin{cases} x^{t+1} - x^t = \alpha x^t + w^t, \\ \qquad\quad y^t = \beta x^t + v^t, \end{cases}$$

donde w^t y v^t son variables gaussianas con media nula y covarianzas

$$E(w^t \cdot w^\tau) = q[t = \tau], E(v^t \cdot v^\tau) = r[t = \tau]$$

donde α, β, q y r son constantes. La condición inicial x^0 es una variable gaussiana con media $\bar{x}^0$ y varianza m_0. Definiendo

$$p_0 = \frac{r m_0}{r + m_0 \beta^2},$$

demuestre que el filtro de Kalman está dado por

$$\hat{x}^{t+1} - \hat{x}^t = \alpha \hat{x}^t + \frac{p_{t+1}\beta}{r}(y^{t+1} - \beta(\alpha + 1)\hat{x}^t),$$

con

$$p_t = \frac{r[(\alpha + 1)^2 p_{t-1} + q]}{r + \beta^2[(\alpha + 1)^2 p_{t-1} + q]}.$$

21. Suponga que la tasa intrínseca de crecimiento de una población está dada por $g(N) = r(1 - a(N - b)^2)$, donde a, b, r son parámetros positivos.

a) Escriba la ecuación diferencial que modela a la población.

b) Considerando la sustitución $N = u/\sqrt{a}$ y $t = \tau/r$, demuestre que la ecuación del inciso anterior puede reescribirse de modo que solamente depende de un parámetro k.

c) ¿Cuántos equilibrios y de qué tipo son los que tiene el modelo cuando $k = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$? Explique.

22. Suponga que en el modelo de depredador-presa hay una capacidad de carga $K > 0$ para la presa, por lo que el modelo es

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = aN(1 - \frac{N}{K}) - bNP, \\ \dfrac{dP}{dt} = cNP - dP. \end{cases}$$

a) Realice las sustituciones $u = \frac{c}{d}N$, $v = \frac{b}{a}P$, $\tau = at$, $\kappa = \frac{d}{cK}$, $\alpha = \frac{d}{a}$ y demuestre que el sistema se puede llevar a la forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u(1 - \kappa u) - uv, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \alpha v(u - 1). \end{cases}$$

b) Por simplicidad, suponga que $\alpha = 1$ y encuentre todos los equilibrios posibles del sistema.

c) Calcule el jacobiano y evalúelo en los equilibrios del inciso anterior.

d) Encuentre los autovalores del jacobiano en cada equilibrio, para así clasificar a estos últimos como puntos silla, espirales o nodos.