Ejercicios
Materia: Tópicos Avanzados de Matemáticas
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre 2022-2023 A
Doctorado en Electrónica Opción: Sistemas Inteligentes Aplicados
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 18 de enero de 2023

1. Justificar la monotonicidad de la consecuencia lógica: si $A \vdash p$ y $A \subseteq B$, entonces $B \vdash p$.

2. Use la monotonicidad y la compacidad para demostrar que si $A \vdash p$ con A infinito entonces existen infinitos A' finitos tales que $A' \vdash p$.

3. Escribir los otros 12 posibles operadores lógicos binarios y tratar de escribirlos en términos de $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$.

4. Verifique que

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) &\rightarrow (p \leftrightarrow q),\\ (p \leftrightarrow q) &\rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p),\\ (p \rightarrow (q \rightarrow r)) &\leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)\end{aligned}$$

   son tautologías.

5. Encuentre las ocurrencias libres y ligadas de las variables en las siguientes fbf. Indique el alcance de cada cuantificador.

   a) $\forall x P(x) \vee Q(z)$.
   b) $S(y) \rightarrow \exists x \forall z R(x, z)$.

6. Represente como fbf a los siguientes enunciados.

   a) Todos los felinos son peligrosos.
   b) Algunos triángulos no son equiláteros ni rectos.

7. *a*) Verifique que $\neg\neg p \dashv\vdash p$. Es decir, verifique que $\neg\neg p \leftrightarrow p$ es tautología.

   b) Demuestre las equivalencias

$$\begin{aligned}\neg(\exists x P(x)) &\dashv\vdash \forall x \neg P(x),\\ \forall P(x) &\dashv\vdash \neg(\exists x \neg P(x)),\end{aligned}$$

   a partir de $\neg(\forall x P(x)) \dashv\vdash \exists x \neg P(x)$.

8. Encuentre la negación del predicado «Todos los P son Q».

9. *a*) Demuestre que si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$ entonces $X \subseteq A \cap B$.

b) Demuestre que si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$ entonces $A \cup B \subseteq X$.

c) Encuentre un ejemplo que ilustre que $A \setminus B \neq B \setminus A$.

d) Demuestre que si $A \subseteq B$ entonces $2^A \subseteq 2^B$.

10. Diga cuáles de los siguientes son espacios vectoriales.

    a) El conjunto de las funciones continuas reales en el intervalo $[0, 1]$, que se denota con $C([0, 1])$, con la suma y multiplicación por escalar

    $$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
    $$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

    b) El conjunto de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado exactamente n.

11. Diga si son verdaderos o falsos los siguientes asertos. Explique.

    a) Un conjunto de vectores que contenga al vector $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente.

    b) Un subconjunto de un conjunto de vectores linealmente dependiente es linealmente dependiente.

    c) Un subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.

12. Encuentre una base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

13. Suponga que $X, Y \subseteq V$ son subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $X \cap Y$ es un subespacio vectorial de Y.

14. Sea la matriz
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    a) Encuentre su inversa por medio de reducir escalonadamente por filas a $(A|I)$.

    b) Encuentre su inversa usando la fórmula de la adjunta clásica.

    c) Resuelva $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ usando las fórmulas de Cramer.

15. Calcule el rango, la nulidad y las correspondientes bases para la matriz
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Compruebe cómo las columnas que no son pivotes son combinaciones lineales de las que sí lo son.

16. Dadas las siguientes matrices, calcule su polinomio característico, sus autovalores, sus autovectores, la dimensión de sus autoespacios y diagonalícelas si es posible.

    a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

    b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & -6 \\ -5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

17. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

    a) Diagonalícela usando la reducción por filas.

    b) Diagonalícela usando los autovectores asociados a su espectro.

    c) Encuentre la sustitución que reduce a la forma cuadrática asociada a una suma de cuadrados.

    Compruebe que el signo de las componentes de la diagonal no cambia según lo predice la ley de inercia de Sylvester.

18. Demuestre que la métrica discreta es, efectivamente, una métrica.

19. Demuestre que si S es un subconjunto de un espacio métrico (X, d) y es acotado, entonces para cada $p \in X$ existe un $C > 0$ tal que $d(p, x) \leq C$ para todo $x \in S$. *Sugerencia:* la desigualdad del triángulo puede ser de utilidad.

20. Demuestre que $(-\infty, a)$ y (b, ∞) son abiertos en $(\mathbb{R}, |?|)$.

21. Demuestre que si $A, B \subseteq X$ son abiertos en (X, d) entonces $A \cup B$ es abierto.

22. Demuestre el siguiente resultado: si (X, d) es un espacio métrico, entonces

    a) los subconjuntos $\emptyset$ y X son cerrados,

    b) si $\{E_k\}_{k\in I}$ es una familia de cerrados entonces $\bigcap_{k\in I} E_k$ es cerrada,

    c) si $E_1, \ldots, E_k$ son cerrados entonces $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ es cerrada.

23. *a*) Demuestre que $\overline{A} = A \cup \partial A$. *Sugerencia:* recuerde que $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement\mathring{A}$ y que $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ y en consecuencia $\complement\overline{A} \subseteq \complement A \subseteq \mathring{A}$.

    b) Demuestre que A es abierto si $A \cap \partial A = \emptyset$.

24. Demuestre que si $A \subseteq (X, d)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in \overline{A}$. *Sugerencia:* usando la proposición sobre sucesiones y conjuntos cerrados se sigue que $x \in E$ donde E es cualquier cerrado que contiene a A.

25. Dado un espacio métrico (X, d), demuestre que si $S \subseteq X$ es finito entonces es compacto.

26. Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función continua y $A \subseteq X$. Demuestre que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

27. Demuestre que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es continua entonces si $U \subseteq Y$ es abierto entonces $f^{-1}(U) := \{x : f(x) \in U\}$ es abierto.