

Ejercicios para el curso de Matemáticas del propedéutico corto

Cuarta parte

Octavio Alberto Agustín Aquino

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Última modificación: 29 de agosto de 2020.

Abramson, sección 5.5: Zeros of polynomial functions

División sintética y teorema del residuo

Usando Random.org, elija cinco coeficientes entre -10 y 10 para formar un polinomio $p(x)$ de grado por lo menos 3. Luego, elija un número a al azar entre -5 y 5 y ejecute la división sintética para encontrar el cociente y el residuo de dividir a $p(x)$ entre $x - a$. Verifique que $p(a)$ es igual al residuo. Haga esto dos veces.

Por ejemplo, los coeficientes me salieron $10, -3, -10, 8$ y -2 , de modo que $p(x) = 10x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 8x - 2$. El valor de a me sale 2 . Así que la división sintética queda

$$\begin{array}{r} 2 \quad | \quad 10 \quad -3 \quad -10 \quad 8 \quad -2 \\ \hline \quad & 20 \quad 34 \quad 48 \quad 112 \\ \hline \quad & 10 \quad 17 \quad 24 \quad 56 \quad 110 \end{array}$$

y, efectivamente,

$$\begin{aligned} p(2) &= 10x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 8x - 2 \\ &= 10(2^4) - 3(2^3) - 10(2^2) + 8(2) - 2 \\ &= 10(16) - 3(8) - 10(4) + 16 - 2 \\ &= 160 - 24 - 40 + 14 \\ &= 110. \end{aligned}$$

Uso del teorema del factor en ecuaciones polinomiales

Tomando al polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ y sabiendo que $x - 2$ es un de sus factores, encontraremos todas las soluciones de $p(x) = 0$. Primero, verificamos que $x - 2$ es factor usando la división sintética (recuerde tener cuidado con el signo; se debe cambiar al aplicar el algoritmo).

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 4 & -4 & -16 \\ \hline & & 2 & 12 & 16 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & 0 \end{array}$$

De lo anterior se sigue que $p(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 8)$. Ahora buscamos dos números que multiplicados den 8 y sumados den 6; son 4 y 2. Por lo tanto, la ecuación puede escribirse como

$$(x - 2)(x + 4)(x + 2) = 0.$$

Por un teorema visto en clase, sabemos que si un producto es nulo, al menos uno de los factores es nulo. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = 2, \quad x = -4 \quad \text{y} \quad x = -2.$$

Use el teorema del factor para encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones polinomiales, usando el factor dado como punto de partida.

-
1. $x^3 - x^2 - 25x + 25 = 0$; $x - 5$.
 2. $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$; $x - 1$.
 3. $4x^3 - 7x + 3 = 0$; $x - 1$.
-

Raíces racionales

Enliste todas las posibles raíces racionales y, por medio de la división sintética, determine cuáles sí lo son.

1. $x^3 - 15x^2 + 26x + 120 = 0$.
 2. $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$.
-

Abramson, sección 2.6: Other Types of Equations

Ecuaciones con exponentes racionales

Resuelva las siguientes ecuaciones, factorizando si es conveniente.

1. $x^{4/3} = 4096$.
 2. $3x^{1/2} - x^{1/4} = 0$.
 3. $(x - 1)^{2/3} = 4$.
-

Ecuaciones con radicales

Resuelva las siguientes ecuaciones, asegurándose de eliminar las soluciones espurias.

1. $\sqrt{x+1} + 10 = 7$.
 2. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.
 3. $\sqrt{x-1} = x - 7$.
-

Ecuaciones con valor absoluto

Resuelva las siguientes ecuaciones que involucran el valor absoluto. Recuerde que el número de soluciones una ecuación es de la forma $|ax + b| = c$ depende de si c es negativo, positivo o nulo.

1. $|5x - 2| = -1$.
 2. $|4x + 1| - 3 = 6$.
 3. $|\frac{3}{4}x - 2| = 0$.
-

Abramson, sección 7.1: Systems of Linear Equations: Two Variables y sección 7.2: Systems of Linear Equations: Three Variables

Verificar una solución de un sistema

Verifique que el punto dado es solución del sistema dado

1. $(x, y) = (3, 5)$,
$$\begin{aligned}x + 8y &= 43, \\3x - 2y &= -1\end{aligned}$$
 2. $(x, y, z) = (4, 2, -6)$,
$$\begin{aligned}6x - 7y + z &= 2, \\-x - y + 3z &= 4, \\2x + y - z &= 1.\end{aligned}$$
-

Sistemas lineales por sustitución

Resuelva los siguientes sistemas por sustitución.

1.
$$\begin{aligned}3x - 2y &= 18, \\5x + 10y &= -10.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}5x - 2y + 3z &= 20, \\2x - 4y - 3z &= -9, \\x + 6y - 8z &= 21.\end{aligned}$$

Sistemas lineales por eliminación

Elimine sucesivamente variables y sustituya hacia atrás para resolver los siguientes sistemas lineales.

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}y &= \frac{2}{9}, \\-\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}4x + 6y - 2z &= 8, \\6x + 9y - 3z &= 12, \\-2x - 3y - z &= -4.\end{aligned}$$

Abramson, sección 7.8: Solving systems with Cramer's Rule

Regla de Cramer

Use las fórmulas de Cramer para resolver los siguientes sistemas.

1.

$$\begin{aligned}5.1x - 2.7y &= 2.25, \\7.3x - 4y &= 3.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}0.1x - 0.2y + 0.3z &= 2, \\0.5x - 0.1y + 0.4z &= 8, \\0.7x - 0.2y + 0.3z &= 8.\end{aligned}$$

Propiedades del conjunto solución de sistemas lineales y de los determinantes

Responda detalladamente.

1. ¿Puede un sistema de dos ecuaciones lineales tener exactamente dos soluciones?

2. Si existe un par de números (a, b) que no satisface un sistema de ecuaciones lineales entonces ¿no tiene soluciones el sistema? Si es así, explique por qué. Si no, proporcione un ejemplo.
 3. Si el determinante de un sistema de ecuaciones lineales es cero entonces ¿puede asegurarse que el sistema carece de soluciones?
 4. El determinante de una matriz es 5. Suponga que en la matriz se intercambian dos filas y una de ellas se multiplica por 3. ¿Cuál es el determinante de la matriz resultante? Justifique su respuesta.
-

Algunos problemas de aplicación que conducen a sistemas lineales

Escriba de manera explícita cómo asigna variables en cada problema, el sistema al que llega y aplique el método que más le agrade para resolverlo, pero indicando paso por paso su ejecución.

1. El automóvil A entra a una supercarretera; quince minutos después lo hace B y viajan en sentidos opuestos a velocidades de crucero. La diferencia entre sus rapideces es de 140 kilómetros por hora. Después de una hora de que A entró a la supercarretera, la distancia entre ellos es de 280 kilómetros. Encuentre la rapidez de cada automóvil.
2. Los tres países de los que Estados Unidos importaba más petróleo en 2019 eran Arabia Saudita, México y Canadá; estos tres países constituyan el 62 % de sus importaciones totales de petróleo. Estados Unidos importaba 43 % más de Canadá que de México, y 42 % más de Canadá que de Arabia Saudita. ¿Qué porcentaje importaba Estados Unidos de cada uno de estos tres países en 2019?