Ejercicios para el curso de Matemáticas del propedéutico corto

Segunda parte

Octavio Alberto Agustín Aquino

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Última modificación: 19 de agosto de 2020.

Arnold, sección 2.1: Introduction to functions.

Evaluación de expresiones algebraicas

Siga el modelo del texto (Ejemplos 2.1.8, 2.1.9 y 2.1.10) para redactar las respuestas; no basta con escribir el resultado.

1. Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, calcule $f(6)$.
2. Dada $g(x) = (x + 3)/(2x - 5)$, calcule $g(-2)$.
3. Dada $h(x) = 5x - 3$, determine $h(2b - 5)$.

Dominio de una expresión

Recuerde que el dominio de una expresión es el conjunto donde "no hay problema" o "no se marca error" al sustituir los valores de equis.

1. ¿Cuál es el dominio de la expresión $f(x) = x^2 + 3x - 4$?
2. ¿Cuál es el dominio de la expresión $g(x) = \sqrt{x - 1}$? (Aquí piense qué sucede si intenta uno poner $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots$, ¿hasta dónde ya se puede extraer la raíz?).
3. ¿Cuál es el dominio de la expresión $h(x) = x/(x + 3)$?

Abramson, sección 1.5: Polynomials

Crear un polinomio

Usando Random.org elija:

1. El grado de un polinomio, entre 3 y 10.
2. Cuántos términos tendrá el polinomio (entre 1 y uno más que el número que salió en el inciso anterior).

3. Los coeficientes, entre -5 y 5, del término de mayor grado al de menor.
4. Escriba el polinomio que resulta, y señale cuál es el término principal y el coeficiente principal.

Por ejemplo, cuando lo intenté, me salió así.

1. Grado: 6.
2. El número de términos me sale es 6.
3. Los coeficientes los voy eligiendo hasta que obtengo los seis coeficientes no nulos: 1, -3, 2, 3, -1, 4.
4. El polinomio que me queda es $x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x$. El término principal es x^6, y el coeficiente principal es 1.

Operaciones aritméticas con polinomios

Genere dos polinomios de grado cuatro eligiendo como coeficientes diez números entre -10 y 10 con Random.org, y encuentre su suma, su diferencia y su producto.

Por ejemplo, cuando los solicité me dio -4, -3, -6, 0, 2, 5, -8, 10, -8, -6, por lo que los polinomios quedarían $p(x) = -4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2$ y $q(x) = 5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x - 6$. La suma es

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (-4+5)x^4 + (-3-8)x^3 + (-6+10)x^2 - 8x + (2-6) \\ &= x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 8x - 4, \end{aligned}$$

la resta es

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (-4-5)x^4 + (-3-(-8))x^3 + (-6-10)x^2 - 8x + (2-(-6)) \\ &= -9x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 8x + 8 \end{aligned}$$

y finalmente el producto es

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= -4x^4(5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x - 6) - 3x^3(5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x - 6) \\ &\quad - 6x^2(5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x - 6) + 2(5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x - 6) \\ &= (-20x^8 + 32x^7 - 40x^6 + 32x^5 + 24x^4) \\ &\quad - (15x^7 - 24x^6 + 30x^5 - 24x^4 - 18x^3) \\ &\quad - (30x^6 - 48x^5 + 60x^4 - 48x^3 - 36x^2) \\ &\quad + (10x^4 - 16x^3 + 20x^2 - 16x - 12) \\ &= -20x^8 + 17x^7 - 46x^6 + 50x^5 - 2x^4 + 50x^3 + 56x^2 - 16x - 12. \end{aligned}$$

Binomios al cuadrado

Usando Random.org elija tres números: el primero, a, entre 1 y 5, el segundo, b, entre -5 y 5 (descartando al 0) y el tercero, c, entre 1 y 5. Forme el binomio $ax + (b/c)$ y elévelo al cuadrado directamente. Repita esto tres veces.

Por ejemplo, a mí me salieron $a = 1$, $b = -3$ y $c = 5$, por lo que hay que elevar el trinomio $x - 3/5$ al cuadrado. Para ello, tenemos

1. El cuadrado del primer término, x^2.
2. El doble producto del primer término por el segundo, $2x(-3/5) = -(6/5)x$.
3. El cuadrado del segundo término, $(3/5)^2 = 9/25$.

Por lo tanto, $(x - 3/5)^2 = x^2 - (6/5)x + 9/25$.

Producto de binomios conjugados

Usando la página Random.org, elija dos números a y b al azar entre 1 y 6 y con ellos escriba el producto de binomios conjugados $(ax + b)(ax - b)$ y obtenga directamente el producto escribiéndolo como diferencia de cuadrados. Haga estos tres veces.

Por ejemplo yo obtuve $a = 6$ y $b = 6$, por lo tanto $(6x+6)(6x-6) = (6x)^2 - 6^2 = 36x^2 - 36$.

Abramson, sección 1.6: Factoring Polynomials.

Máximo factor común

Factorice encontrando el máximo factor común.

1. $14x + 4xy - 18xy^2$.
2. $30x^3y - 45x^2y^2 + 135xy^3$.
3. $36j^4k^2 - 18j^3k^3 + 54j^2k^4$.

Por ejemplo, para factorizar $49mb^2 - 35m^2ba + 77ma^2$:

1. El máximo factor o divisor común de 49, 35 y 77, según sus factorizaciones en números primos, es 7.
2. El máximo factor común de mb^2, m^2ba y ma^2 es m, pues es la única literal que aparece en las tres expresiones, y 1 es el menor exponente con el que aparece.
3. Ahora vemos cómo cada sumando se escribe como un producto con los máximos factores comunes como factores:
   1. $49mb^2 = 7m(b^2)$.
   2. $35m^2ba = 7m(5mba)$.
   3. $77ma^2 = 7m(11a^2)$.
4. Por lo tanto, la factorización queda $7m(b^2 - 5mba + 11a^2)$.

Factorización de trinomios con coeficiente principal unitario

Para factorizar el trinomio $x^2 - 7x + 6$, hacemos una lista de los posibles factores de 6, para ver cuánto suman y si podemos encontrar un par que sumados den -7.

1. 1, 6; suma: 7.
2. -1, -6, suma: -7.
3. 2, 3; suma: 5.
4. -2, -3; suma: -5.

Vemos que los factores deseados son -1 y -6, por lo que la factorización es $(x - 1)(x - 7)$.

Factorice los siguientes trinomios, explicando su razonamiento.

1. $x^2 - x - 2$.
2. $x^2 + 14x + 13$.
3. $x^2 - 9x + 18$.

Factorización de trinomios

Para factorizar $2x^2 + 9x + 9$, el producto del coeficiente principal y el coeficiente constante es $2 \times 9 = 18$. Ahora encontramos sus factores y su suma para hallar una que dé 9.

1. 1, 18; suma: 19.
2. -1, -18; suma: -19.
3. 2, 9; suma: 11.
4. -2, -9; suma: -11.
5. 3, 6; suma: 9.
6. -3, -6; suma: -9.

Vemos que los factores buscados son 3 y 6, por lo que podemos escribir

$$2x^2 + 9x + 9 = 2x^2 + 3x + 6x + 9$$

y factorizamos el factor común de los primeros dos sumandos y luego el factor común de los últimos dos sumandos

$$2x^2 + 9x + 9 = 2x^2 + 3x + 6x + 9 = x(2x + 3) + 3(2x + 3)$$

y, al aparecer un factor común en los dos sumandos que obtuvimos, resulta

$$2x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 3).$$

Factorice las siguientes expresiones. Explique su razonamiento.

1. $3x^2 + 8x + 4$.

2. $6x^2 + 5x - 4$.
3. $20w^2 - 47w + 24$.

Factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencias de cuadrados

Factorice los siguientes polinomios, observando cuadrados de qué terminos son el primer término y el último, aplicando "en reversa' ' el binomio al cuadrado o el producto de binomios conjugados.

1. $m^2 - 20m + 100$.
2. $49n^2 + 168n + 144$.
3. $25y^2 - 196$.
4. $4m^2 - 9$.

Notas sobre simplificación, multiplicación y división de expresiones racionales.

Abramson, sección 1.6: Rational Expressions.

Simplificación de expresiones racionales

Simplifique las siguientes expresiones racionales.

1. $\frac{m-12}{m^2-144}$.
2. $\frac{3c^2+25c-18}{3c^2-23c+14}$.
3. $\frac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20}$.

Multiplicación y división de expresiones racionales

Encuentre los siguientes productos y cocientes, expresando el resultado en sus mínimos términos.

1. $\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-6} \cdot \frac{2x^2+7x-15}{x^2-9}$.
2. $\frac{2d^2-9d-35}{d^2+10d+21} \cdot \frac{3d^2+2d-21}{3d^2+14d-49}$.
3. $\frac{6b^2+13b+6}{d^2+10d+21} \cdot \frac{6b^2+31b-30}{18b^2-3b-10}$.
4. $\frac{16x^2+18x-55}{32x^2-36x-11} \div \frac{2x^2+17x+30}{4x^2+25x+6}$.
5. $\frac{16a^2-24a+9}{4a^2+17a-15} \div \frac{16a^2-9}{4a^2+11a+6}$.

Suma y diferencia de expresiones racionales

Si sumamos

$$\frac{3}{x+5}+\frac{1}{x-3}$$

vemos que, como los denominadores no tienen factores en común, entonces el mínimo común denominador es su producto, o sea $(x+5)(x-3)$. Por lo tanto basta multiplicar de forma cruzada para obtener

$$\begin{aligned}\frac{3(x-3)}{(x+5)(x-3)}+\frac{(x+5)1}{(x+5)(x-3)} &= \frac{3(x-3)+x+5}{(x+5)(x-3)}\\ &= \frac{3x-9+x+5}{(x+5)(x-3)}\\ &= \frac{4x-4}{(x+5)(x-3)}\\ &= \frac{4(x-1)}{(x+5)(x-3)}.\end{aligned}$$

Consideremos ahora una diferencia

$$\frac{6}{x^2+2x+1}-\frac{2}{x^2-1}.$$

En este caso, tenemos que el primer denominador es un trinomio cuadrado perfecto, así que es $(x+1)^2$, mientras que el segundo es una diferencia de cuadrados, o sea que se factoriza como un producto de binomios conjugados, o sea $(x+1)(x-1)$. En este caso, el mínimo común denominador es $(x+1)^2(x-1)$. Así, nos queda

$$\begin{aligned}\frac{6(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} &= \frac{6x-6}{(x+1)^2(x-1)}-\frac{2x+2}{(x+1)^2(x-1)}\\ &= \frac{4x-8}{(x+1)^2(x-1)}\\ &= \frac{4(x-2)}{(x+1)^2(x-1)}.\end{aligned}$$

Calcule lo siguiente. Indique cuál es el mínimo común denominador de los términos.

1. $\frac{2}{x}+\frac{10}{y}$
2. $\frac{12}{2q}-\frac{6}{3p}$.
3. $\frac{y+3}{y^2-2y}+\frac{y-3}{y}$.
4. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x+3}{2x+1}$.

Racionalización de denominadores en expresiones racionales

Cuando tenemos una expresión de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

a veces queremos "quitar' ' la raíz cuadrada del denominador, y para eso acudimos a la *racionalización*, multiplicando tanto al numerador como el denominador por el binomio conjugado, en este caso $\sqrt{x}-2$. O sea

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

También se puede racionalizar el numerador, como por ejemplo en la expresión

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

que se ve en cálculo infinitesimal. Multiplicamos, pues, por el binomio conjugado del numerador (es decir, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$) tanto al numerador como el denominador. Queda

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x-y}{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

y esto se puede simplificar a

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

siempre que $x\neq y$.

Racionalice apropiadamente, y simplifique si es posible.

1. $\frac{\sqrt{1+x-h}-\sqrt{1+x}}{h}$.
2. $\frac{\sqrt{t}-7}{\sqrt{t}+7}$.