Ejercicios para el curso de Matemáticas del propedéutico corto

Primera parte

Octavio Alberto Agustín Aquino

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Última modificación: 13 de agosto de 2020.

Arnold, sección 1.1: Number Systems

Descomposición en factores primos

Descomponga en factores primos el número que resulta de concatenar su mes y los dos últimos dígitos de su año de nacimiento. Por ejemplo, para mí es 983, que es un número primo, pues no es divisible entre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 o 31. En efecto,

- entre 2 toca a 491 y sobra 1;
- entre 3 toca a 327 y sobran 2;
- entre 5 toca a 196 y sobran 3;
- entre 7 toca a 140 y sobran 3;
- entre 11 toca a 89 y sobran 4;
- entre 13 toca a 75 y sobran 8;
- entre 17 toca a 57 y sobran 14;
- entre 19 toca a 51 y sobran 14;
- entre 23 toca a 42 y sobran 17;
- entre 29 toca a 33 y sobran 26;
- entre 31 toca a 31 y sobran 22.

Para una persona que nació en enero de 1984, tenemos 184, que es divisible entre dos tres veces ($184/2 = 92$, $92/2 = 46$, $46/2 = 23$) y una vez entre 23, por lo que $184 = 2 \times 2 \times 2 \times 23$. Haga explícitas las divisiones con los residuos.

Axiomas de cuerpo de los números reales

En la página de la Wikipedia sobre cuerpo (en matemática) aparecen seis propiedades que satisface un cuerpo como el de los números reales. Redáctelas con sus propias palabras (una clásica, por ejemplo, es "el orden de los factores no altera el producto") y proporcione un ejemplo con números de cada una.

Tipos de números

Proporcione un ejemplo de cada tipo de número.

1. Un número natural.
2. Un número entero que no sea natural.
3. Un número racional que no sea ni positivo ni entero.
4. Un número irracional que no sea ni $\sqrt{2}$ ni e ni π.

Arnold, sección 1.2: Solving Equations

Axiomas de campo y propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones sencillas

De la página del libro de Arnold, ejercicios del capítulo 1, resuelva los ejercicios 1.5.44,

$$76x - 55 = 0$$

1.5.54,

$$-2x + 3 = -5x - 2$$

1.5.66,

$$(8x - 3) + (-3x + 9) = -4x - 7$$

1.5.70

$$-8.4x = -4.8x + 2$$

y 1.5.76

$$-\frac{4}{3}x - 8 = \frac{1}{4}x + 5.$$

La respuesta debe estar redactada como se muestra a continuación. Los racionales no deben escribirse como decimales para operar.

El ejercicio 1.5.43 pide resolver a $45x + 12 = 0$ para x. Sumamos de ambos lados el inverso aditivo de 12 (que es -12) para obtener

$$45x + 12 - 12 = 0 - 12$$

(obsérvese que no tenemos que poner paréntesis en el miembro izquierdo por la asociatividad de la suma) y por lo tanto

$$45x + 0 = -12$$

según la propiedad del inverso aditivo y del neutro aditivo. También por la propiedad del neutro aditivo, tenemos

$$45x = -12.$$

Según la propiedad del inverso multiplicativo, existe el de 45, que es 1/45, y al multiplicarlo a ambos miembros de la igualdad, resulta

$$(1/45)45x = (1/45)(-12)$$

(no tenemos que poner más paréntesis en el miembro izquierdo porque hay asociatividad en la multiplicación) y, por la propiedad del inverso multiplicativo y de los cocientes, resulta que

$$x = -12/45.$$

Consecuencias de los axiomas de cuerpo

Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Hay más de un neutro multiplicativo en el cuerpo de los números reales para un número dado.
2. Existe solamente un neutro aditivo en el cuerpo de los números reales para un número dado.
3. Dado un número real, tanto su inverso multiplicativo como aditivo son únicos, si es que existen.

Indique todas las respuestas correctas.

1. Si se multiplican dos números reales y el resultado es cero, entonces...
    1. al menos uno de ellos es cero.
    2. al menos uno de ellos no es cero.
    3. exactamente uno de ellos es cero.
2. ¿Qué axiomas del cuerpo de los números reales se requieren para demostrar que "menos por menos da más"?
    1. Existencia del inverso aditivo.
    2. Ley de tricotomía.
    3. Asociatividad aditiva.
    4. Existencia del inverso multiplicativo.
    5. Existencia del neutro multiplicativo.
    6. Distributividad.
    7. Asociatividad multiplicativa.
    8. Existencia del neutro aditivo.
3. ¿Cuáles alternativas mutuamente excluyentes para dos números reales a y b que indica la ley de tricotomía?
    1. $a \geq b$.
    2. $a \neq b$.
    3. $a < b$.
    4. $a > b$.
    5. $a = b$.
    6. $a \leq b$.

7. $a \backslash b$.

Unicidad del neutro multiplicativo

Imitando la demostración de la unicidad del neutro aditivo que viene en el texto "¿Por qué menos por menos da más?", demuestre la unicidad del neutro multiplicativo. Básicamente, lo que tiene que hacer es cambiar el 0 por 1 y la suma por multiplicación. Lea con cuidado lo que redacte antes de enviarlo.

Orden en la recta numérica

Usando la página Random.org genere primero cuatro números aleatorios entre 0 y 10 y luego otros cuatro entre 1 y 10. Con ellos, construya cuatro números racionales con los primeros cuatro como numeradores y los siguientes cuatro como denominadores. Por ejemplo, cuando yo lo intenté, me salieron primero 1, 9, 0 y 5, y luego 10, 2, 5 y 3, por lo que mis números racionales son 1/10, 9/2, 0/5 y 5/3.

Ahora, con una moneda, elija un signo para cada uno de ellos. A mí me salió -,+,+,+, por lo que me quedan -1/10, 9/2, 0/5 y 5/3.

Por último, ordénelos y ubíquelos en la recta numérica. En mi caso, quedan: -1/10, 0/5, 5/3 y 9/2.

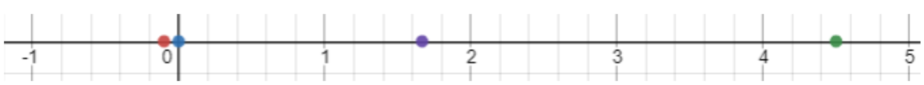

Figure 1: Puntos -1/10, 0/5, 5/3 y 9/2 en la recta real

Valor absoluto y distancia entre números reales

Usando Random.org elija cuatro números al azar x, y, z y w entre -10 y 10 (siga eligiendo hasta que al menos uno salga negativo) y encuentre:

1. La distancia entre x y z (exprese su resultado también en términos del valor absoluto).
2. La distancia entre $x + y + z$ y w (exprese su resultado también en términos del valor absoluto).
3. $|y + w|$.
4. $|x| - |z|$.
5. $|z|/(1 + |y|)$.

Por ejemplo, a mí me salieron $x = 7$, $y = 2$, $z = 9$ y $w = -7$. Entonces las respuestas, respectivamente, son:

1. La distancia entre 7 y 9 es $|7 - 9| = | - 2| = 2$.
2. La distancia entre $7 + 2 + 9 = 18$ y -7 es $|18 - (-7)| = |25| = 25$.
3. $|2 + (-7)| = | - 5| = 5$.
4. $|7| - |9| = 7 - 9 = -2$.
5. $|9|/(1 + |2|) = 9/3 = 3$.

Abramson, sección 1.3: Exponents and Scientific Notation

Leyes de los exponentes

Escriba lo siguiente en términos de la menor cantidad de bases posibles. No simplifique más que eso.

1. x^3x^{100}.
2. $(-5)^7/(-5)^2$.
3. $(xy^3)^2/(xy)^3$.
4. $(2x^3)^5$.
5. $(-2x^3)/(2x^3)$.
6. $(-2t)^{-2}/((-2t)^{-7})$.
7. $(101k^8)/(2k^{10})$.

Propiedades de los radicales

Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. La raíz cuadrada principal se distribuye sobre productos. Es decir, la raíz principal de xy es igual a la raíz principal de x por la raíz principal de y.
2. La raíz cuadrada principal no se distribuye sobre cocientes. Es decir: existen algunos números a y b tales que la raíz cuadrada principal de a/b no es igual a la raíz cuadrada principal de a sobre la raíz cuadrada principal de b.
3. La raíz principal de un número real x es el número real no positivo tal que, cuando se multiplica por sí mismo, es igual a x.

Indique todas las respuestas correctas.

1. Suponga que número a se eleva al exponente m/n. Esto es equivalente as...
   1. tomar la raíz principal n-ésima de a y elevar el resultado a la m.
   2. tomar la raíz principal m-ésima de a y elevar el resultado a la n.

    3. elevar a a a la m-ésima potencia y obtener la raíz n-ésima principal del resultado.
    4. elevar a a a la n-ésima potencia y obtener la raíz m-ésima principal del resultado.
2. La raíz n-ésima principal de un número real a es...
    1. cualquier número del mismo signo que a tal que, elevado a la n, da como resultado a.
    2. cualquier número positivo que, elevado al cuadrado, da como resultado a.
    3. cualquier número positivo que, elevado a la n, da como resultado a.
    4. cualquier número que, elevado a la n, da como resultado a.

Notación científica

Recuerde que un número está en notación científica si puede escribirse como $a \times 10^n$, donde $1 \leq |a| < 10$ y n es un entero. En computación se escribe simplemente `aen`. Esto es muy útil para escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo:

1. La población mundial en 2014 era de 7 158 000 000 personas; en notación científica, escribimos 7.158×10^9, o bien `7.158e9`.
2. El tiempo en segundos que tarda la luz en viajar un metro es 0.00000000334 s. En notación cientifica, esto se escribe 3.34×10^{-9}, o bien `3.34e-9`.

Responda lo siguiente.

1. Reporte el número con todos sus dígitos y luego escriba en notación científica los siguientes números.
    1. La población de México en el año de su nacimiento.
    2. La distancia media de la Tierra al Sol en metros.
2. Escriba los números 7.03×10^5 y -3.9×10^{-13} en notación decimal estándar.

Abramson, sección 1.4: Radical and Rational Expressions

Propiedades básicas de los radicales

Diga si es verdadero o falso

1. Si se eleva al producto xy a la n-ésima potencia, el resultado es equivalente a elevar a x a la n-ésima potencia y multiplicar esto por y elevado a la n-ésima potencia.
2. Si se dividen dos potencias con la misma base, sus exponentes se restan.

3. Si se eleva al cociente x/y a la n-ésima potencia, el resultado es equivalente a elevar a x a la n-ésima potencia y multiplicar esto por y elevado a la n-ésima potencia.
4. Si un número distinto de cero se eleva a la cero, entonces el resultado es cero.
5. Si se multiplican dos potencias con la misma base, entonces los exponentes se multiplican.
6. Si una potencia se eleva a un exponente, entonces los exponentes se multiplican.

Señale la respuesta correcta.

1. Suponga que x es un número no nulo y n un número natural. ¿A cuál de los siguientes equivale a x^{-n}?
   1. $-x$.
   2. -1.
   3. 0.
   4. x^{-n}.
   5. $\frac{1}{x^n}$.

Simplificación de radicales

Para esta tarea escribiremos $\sqrt{x}$ para la raíz cuadrada principal de x.

1. Evalúe las expresiones $\sqrt{\sqrt{625}}$ y $\sqrt{17^2 - 15^2}$.
2. Simplifique $\sqrt{75x^4y^6z^3}$.
3. Simplifique $\sqrt{49/3}$, $\sqrt{(3z^4)/(12y^2)}$ y $\sqrt{(16x^{10}y^3)/(2x^3y^2)}$.

Exponentes racionales

Recordemos que $\sqrt[n]{x}$ significa la raíz principal n-ésima de x.

1. Escriba a $3125^{3/5}$ como un radical y simplifique.
2. Escriba a $\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{16y^5}$ usando exponentes racionales.
3. Simplifique $(9x)^{1/2}(7x^{3/4})$.

Racionalización de denominadores

Escriba lo siguiente en una forma más simple usando racionalización.

1. $\frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$.
2. $\frac{3}{2-\sqrt{7}}$.