Ejercicios
Materia: Métodos Matemáticos de la Física II
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Verano 2023
Ingeniería en Física Aplicada
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 18 de septiembre de 2023

1. Verifique que el término de superficie
$$p(x)\left[\overline{v(x)}\frac{d}{dx}u(x)-u(x)\frac{d}{dx}\overline{v(x)}\right]\Bigg|_a^b$$
se anula con las condiciones de frontera
$$\begin{cases}\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)=0,\\ \alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=0.\end{cases}$$

2. Para el operador lineal $\mathcal{L}=\frac{d^2}{dx^2}$ escriba explícitamente la condición que muestra que es autoadjunto y particularice para obtener la condición para que sea hermitiano.

3. Demuestre que la ecuación
$$\frac{1}{\Theta\operatorname{sen}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{(\operatorname{sen}(\theta))^2}+\lambda=0$$
puede llevarse a
$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P=0$$
con la sustitución $x=\cos(\theta)$ y definiendo $P(x)=\Theta(\arccos(x))$.

4. Use las identidades
$$\begin{aligned}(1+2\ell)xP_\ell(x)-\ell P_{\ell-1}(x)&=(\ell+1)P_{\ell+1}(x),\\ P'_\ell(x)-2xP'_{\ell-1}(x)+P'_{\ell-2}(x)&=P_{\ell-1}(x),\end{aligned}$$
para demostrar que
$$P'_{\ell+1}(x)-P'_{\ell-1}(x)=(2\ell+1)P_\ell(x).$$

5. Usando la función generadora de los polinomios de Legendre demuestre que
$$\int_0^1 P_{2\ell+1}(x)\,dx=(-1)^\ell\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell+1}\ell!(l+1)!}$$
y que, excepto para $\ell=0$ que
$$\int_0^1 P_{2\ell}(x)\,dx=0.$$

6. Demuestre que

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x).$$

7. Verique que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}$$

para $\ell = 0, 1, 2$, donde $\{Y_\ell^m\}$ son los armónicos esféricos.

8. Una carga $+2q$ se ubica en el origen y dos cargas $-q$ se colocan a una distancia $\pm a$ a lo largo del eje polar. Por medio la función generadora de los polinomios de Legendre, muestre que el potencial Φ en el punto (r, θ, ϕ) para $r > a$ es

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s} P_{2s}(\cos(\theta)).$$

9. Encuentre, expandido en términos de polinomios de Legendre, el potencial dentro de una esfera de radio R cuya superficie se mantiene a un potencial $\operatorname{sen}(3\phi)$.

10. *a*) Demuestre que $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$, donde J_p es una función de Bessel.

    b) Sabiendo que

    $$N_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(\pi p)}$$

    demuestre que $N_{(2n+1)/2} = (-1)^{n+1} J_{-(2n+1)/2}(x)$.

11. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} j_n(x) = j_{n-1}(x) - (n+1) j_n(x)/x$$

donde j_n es una función esférica de Bessel.

12. Usando la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Hermite encuentre H_2 y H_3 y calcule directamente los valores de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_p(x) H_q(x)\, dx$$

cuando $p = q = 2$ y $p = 2$ y $q = 3$. Es de utilidad saber que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

13. Resuelva la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'' - a^2 y = [t > 0], \\ \quad y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

encontrando su función de Green $G(t; t')$ y expresando la solución como una integral. *Sugerencia:* para $t < t'$ deben cumplirse las condiciones iniciales; es decir, $G(0; t') = G'(0; t') = 0$, por lo que $u_<(t) = G(t; t') = 0$ si $t < t'$; mientras que en $t = t'$ debe ocurrir que

$$c_< u'_<(t') - c_> u'_>(t') = 0 - c_> u'_>(t') = -\frac{1}{p(t')}$$

donde p es la función determinada por la forma de Sturm-Liouville de la ecuación (y recuerde que $u_>$ debe ser también una solución de la ecuación diferencial).

14. Exprese en forma de una integral el potencial debido a una esfera cargada con densidad de carga uniforme ρ y de radio R en términos de una función de Green.

15. Encuentre las geodésicas en el plano usando coordenadas polares y la ecuación de Euler-Lagrange apropiada.

16. Si la curva $y = g(x)$ se hace girar respecto al eje z, entonces la ecuación de la superficie resultante es $x^2 + y^2 = g(z)^2$, o bien $x = g(z)\cos(\theta)$, $y = g(z)\operatorname{sen}(\theta)$. Demuestre que una geodésica $\theta(z)$ sobre dicha superfice satisface

$$\theta = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(z)]^2}}{g(z)\sqrt{g(z)^2 - c_1^2}}\, dz + c_2.$$

17. El lagrangiano para el mesón π es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \tfrac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - |\nabla\phi|^2 - \mu^2\phi^2)$$

donde μ es la masa del mesón y $\phi(\mathbf{x}, t)$ es su función de onda. Aplicando el principio de Hamilton encuentre la ecuación de onda que satisface ϕ.

18. Dada una curva de longitud L que conecta los puntos $(\pm a, 0)$, encuentre aquella tal que el sólido de revolución que engendra es de área mínima.

19. Estime el menor autovalor de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x^2 y + \lambda y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

usando una función cuadrática como *ansatz*.

20. Muestre que el producto directo de dos tensores de rango 2 es un tensor de rango 4.

21. Encuentre el tensor de inercia, los momentos principales de inercia y sus ejes correspondientes.

    a) Un sistema de masas unitarias puntuales en $(1, 2, 1)$ y $(-1, 1, 1)$.

    b) Una masa uniforme de densidad unitaria limitada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

22. Demuestre que $\delta_{ij}\epsilon_{k\ell m}$ es un tensor isotrópico de rango 5.

23. Evalúe $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}\delta_{im}$ y $\epsilon_{3jk}\epsilon_{kj3}$.

24. Escriba la identidad

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

    usando tensores y demuéstrela usando las propiedades de estos últimos.

25. Demuestre que si un $T^i_{jk\ell}$ es un tensor en el sistema (x') y $T^i_{jk\ell} = 3T^i_{\ell jk}$ ahí entonces la ecuación es válida en todo sistema coordenado.

26. Calcule el jacobiano J para las coordenadas esféricas, calcule el tensor G y verifique que es válida la fórmula correspondiente para ds^2.

27. Calcule las componentes no nulas del símbolo de Christoffel del primer tipo para el tensor métrico de las coordenadas esféricas.

28. Verifique que $x^1 = a \sec(x^2)$ son las geodésicas en coordenadas polares haciendo la curvatura generalizada igual a cero.