1. Use el método del wronskiano para obtener la solución

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

de la ecuación de Legendre a partir del polinomio de Legendre $P_1 = x$.

2. Sabiendo que los armónicos esféricos para $\ell = 0, 1$ son

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}(\theta) \exp(\pm i\phi), \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta), \end{aligned}$$

demuestre que se satisface

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}$$

para $m = 0$ y $m = 1$.

3. Exprese a la función

$$f(\theta, \phi) = \operatorname{sen}(\theta)[(\operatorname{sen}(\theta/2))^2 \cos(\phi) + i(\cos(\theta/2))^2 \operatorname{sen}(\phi)] + (\operatorname{sen}(\theta/2))^2$$

como una suma de armónicos esféricos. *Sugerencia:* use las fórmulas de ángulo mitad.

4. Use a la función generadora de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ para demostrar que

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\, dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!}.$$

5. Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ se pueden definir según

$$\Phi(x, h) = \exp(2xh - h^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) h^n.$$

Demuestre que
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi - 2x\frac{\partial}{\partial x}\Phi + 2h\frac{\partial}{\partial h}\Phi = 0$$
y use a Φ para demostrar que $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

6. Escogiendo una forma adecuada de h en la función generadora

$$G(z,h) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)h^n$$

demuestre que son válidas las siguientes representaciones integrales de las funciones de Bessel del primer tipo para m entero:

$$J_{2m}(z) = \frac{(-1)^m}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(z\cos(\theta))\cos(2m\theta)\,d\theta, \qquad m \geq 1,$$
$$J_{2m+1}(z) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(z\cos(\theta))\sin((2m+1)\theta)\,d\theta, \qquad m \geq 0.$$

7. Establezca la serie de potencias para las funciones de Bessel esféricas

$$j_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\ell+2k}}{k!2^k(2\ell+2k+1)!!}$$

donde $(2n+1)!! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)$. Puede utilizar el hecho de que
$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
donde Γ es la función gamma de Euler.