1. Resuelva la ecuación
$$\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
por separación de variables.
2. La ecuación de onda que describe las vibraciones de una membrana con una tensión T con densidad uniforme ρ es
$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$
Encuentre una solución separable suponiendo que la membrana está tensada sobre un marco de longitud a y anchura b, y demuestre que las frecuencias angulares naturales de la membrana están dadas por
$$\omega^2 = \frac{\pi^2 T}{\rho}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$
donde m y n son enteros positivos.
3. Una vara de metal, que se puede considerar como el intervalo $[0, l]$, está aislada en sus lados pero no en sus extremos, cuya temperatura inicial es 1. De pronto ambos lados se colocan a temperatura 0. La ecuación diferencial que modela esta situación es
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$
Por medio de una separación de variables escriba la solución en términos de las autofunciones apropiadas.
4. La ecuación de onda para una membrana circular es
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$
Usando la separación de variables $u = T(t)P(\rho)\Theta(\theta)$, demuestre que la

solución en general es de la forma

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\sqrt{\lambda_{0,m}}\rho)(A_{0,m}\cos(\sqrt{\lambda_{0,m}}ct) + C_{0,m}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_{0,m}}ct)) \\
+ \sum_{m,n=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}\rho)\Big[(A_{n,m}\cos(n\theta) + B_{n,m}\,\mathrm{sen}(n\theta))\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}ct) \\
+(C_{n,m}\cos(n\theta) + D_{n,m}\,\mathrm{sen}(n\theta))\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_{n,m}}ct)\Big],
\end{aligned}
$$

donde $0 < \lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \cdots$ son las raíces de la función de Bessel $J_n(\sqrt{x}a)$, considerando las condiciones de frontera $u(a,\theta,t) = 0$, que $u(0,\theta,t)$ no diverge a infinito y que u es univaluada.

5. Considerando que las funciones de Legendre P_ν^m satisfacen

$$P_\nu^m(s) = \frac{(-1)^m}{2^\nu \nu!}(1-s^2)^{m/2}\frac{d^{\nu+m}}{ds^{\nu+m}}(s^2-1)^\nu$$

verifique que los armónicos esféricos para $\nu = 0$ y $\nu = 1$ son, respectivamente, 1, $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$, $\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) = \frac{x}{r}$ y $\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) = \frac{y}{r}$.

6. Verifique que, dada la ecuación diferencial

$$p(x)y'' + r(x)y' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

se puede llevar a la forma del operador de Sturm-Liouville

$$(F(x)p(x)y')' + F(x)q(x)y = -\lambda F(x)\rho(x)y$$

usando el factor integrante

$$F(x) = \exp\left(\int^x \frac{r(t) - p'(t)}{p(t)}\,dt\right).$$

Use esto para poner en forma de Sturm-Liouville a la ecuación de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0.$$

7. Una barra muy larga y angosta está aislada térmicamente, y se mantiene a temperatura nula hasta el instante $t = 0$, en el cual uno de sus extremos se pone en contacto con una fuente de calor de modo que se mantiene a temperatura u_0. La situación queda descrita por la EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condiciones inicial $u(x, 0) = 0$ y de frontera $u(0, t) = u_0$ y $\lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0$. Resuelva este problema usando la transformada senoidal de Fourier.
8. Resuelva la ecuación de Poisson $\nabla^2 u(x, y) = 1$ en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ con condiciones de frontera $u(0, y) = u(1, y) = 0$ para $0 \leq y \leq 1$ y $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$.