Ejercicios
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Materia:Matemáticas Discretas
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 20-21 A
Maestría en Tecnologías de Cómputo Aplicado
Última actualización: 22 de enero de 2021.

1. Responda las siguientes preguntas.
   a) ¿Se cumple que $\{2,3\} \in \{\{1,2\},\{3,4\}\}$?
   b) ¿Se cumple que $\{2\} \in \{1,2,3,4\}$?
   c) ¿Se cumple que $\{1,\{1,2\}\} \subseteq \{1,2,\{1,2\},\{3,4\}\}$?
   d) ¿Se cumple que $\{1,2,2\} \subseteq \{1,2\}$?

2. Para cada una de las siguientes situaciones, dibuje un diagrama de Venn que la satisfaga.
   a) $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$.
   b) $A \supseteq C$, $A \cup B = C$.

3. Escoja un conjunto aleatorio A de 3 números y dos de dos letras B y C, considerándolos ordenados de mayor a menor y alfabéticamente. Liste los siguientes conjuntos en orden lexicográfico.
   a) $A \times (B \times C)$.
   b) $(B \times A) \times C$.

4. Demuestre las siguientes identidades usando las propiedades algebraicas de los operadores. Se tiene que $A, B, C \subseteq U$. Puede utilizar el hecho de que $A \setminus B = A \cap \complement B$.
   a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
   b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.
   c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. *a)* Dado $S = \emptyset$, calcule $2^{2^{2^S}}$.
   b) Recordando que $a^+ = a \cup \{a\}$, escriba los siguientes conjuntos enumerando explícitamente sus elementos
   $$((\emptyset^+)^+)^+, (((\emptyset^+)^+)^+)^+.$$

6. Demuestre las siguientes identidades usando dos diagrams de Venn-Euler y también usando lógica de predicados.
   a) $c \setminus (a \cap b) = (c \setminus a) \cup (c \setminus b)$.
   b) $c \cap (a \setminus b) = (c \cap a) \setminus (c \cap b)$.

7. Demuestre que, dados dos conjuntos a y b, la intersección $a \cap b$ es su *máxima cota inferior*, es decir, $a \cap b \subseteq a, b$ y para cualquier conjunto c tal que $c \subseteq a, b$ se satisface que $c \subseteq a \cap b$.

8. Teniendo en cuenta las definiciones $a + b = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$ y $a \cdot b = a \cap b$, demuestre que:

   a) $x + (y + z) = (x + y) + z$.
   b) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

9. Sea $a = \{r, s, t\}$. Calcule la solución de $w + y = z$ dentro de 2^a para $y = \{r, s\}$ y $z = \{s, t\}$.

10. Sea $a = \{\emptyset\}$. Escriba completas las tablas de la suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ para $x, y \in 2^a$.

11. Definiendo $(x, y, z) = ((x, y), z)$, demuestre que $(x, y, z) = (u, v, w)$ si, y sólo si, $x = u$, $y = v$ y $z = w$.

12. Demuestre que si $g = \Delta_{\mathrm{pr}_1(g)}$ entonces $g = g^{-1}$. Encuentre un contraejemplo para ver que la recíproca es falsa, es decir, encuentre una gráfica tal que $g = g^{-1}$ pero que no sea la diagonal de $\mathrm{pr}_1(g)$. *Sugerencia:* tiene que ser simétrica respecto a la recta a 45° si es una gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

13. Demuestre que la composición de gráficas funcionales es funcional.

14. *a*) Dado el conjunto $1 = \{\emptyset\}$ y cualquier conjunto a, demuestre que existe exactamente una función $\iota : a \to 1$. Si $a = \emptyset$ y b es un conjunto arbitrario, demuestre que eixste una única función $\phi : \emptyset \to b$.
    b) Demuestre que ι es suprayectiva, que ϕ es inyectiva y que Id_a es biyectiva.

15. Demuestre, por medio de un contraejemplo, que la gráfica inversa de una función inyectiva es funcional pero no necesariamente una función.

16. Demuestre que existe una inyección $\mathrm{sing} : a \to 2^a$ que envía a cada elemento de a a su conjunto singular $\mathrm{sing}(a) = \{a\}$.

17. Sea R la relación en el conjunto potencia 2^a con $a = \{0, 1, 2\}$ definida según xRy si y sólo si $x \cap y \neq \emptyset$. La relación...

    a) ¿es reflexiva?
    b) ¿es simétrica?
    c) ¿es transitiva?

    Demuestre en caso afirmativo; proporcione un contrajemplo en caso negativo.

18. Considere el conjunto $a = \{x, y, z, w\}$ y las siguientes relaciones sobre a:

$$R = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y), (z, x), (z, y), (w, y), (w, z)\},$$
$$S = \{(x, x), (x, z), (y, x), (y, z), (y, w), (z, y), (w, z)\}.$$

a) Dibuje las relaciones con flechas.
b) Con ayuda de diagramas sagitales, calcule $R \circ S$ y $R^2 = R \circ R$.

19. Sean R y S como en el ejercicio anterior.

    a) Escriba las matrices binarias correspondientes a R y S.
    b) Con ayuda de las matrices del inciso anterior, calcule $S \circ R$ y $S^2 = S \circ S$.

20. Calcule las cerraduras reflexiva, simétrica, transitiva y de equivalencia de la relación $R = \{(x, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}$ sobre el conjunto $\{x, y, z, w\}$.

21. Encuentre todos los órdenes parciales en el conjunto $\{0, 1\}$. ¿Cuáles de ellos son lineales?

22. Encuentre todas las particiones distintas posibles del $\{0, 1, 2\}$.

23. Demuestre que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

24. ¿Cuántos números de tres dígitos hay? Recuerde que no se admiten ceros a la izquierda. ¿Cuántos números de a lo más tres dígitos hay?

25. Suponga que se tiene el alfabeto latino de 26 letras.

    a) Defina un "4-vocablo" como cualquier lista que conste de 4 letras con *al menos* una de las vocales A, E, I, O o U. ¿Cuántos 4-vocablos existen.
    b) Defina ahora un "4-vocablo" como cualquier lista que conste de 4 letras con *exactamente* una de las vocales A, E, I, O o U. ¿Cuántos 4-vocablos existen.

26. Considere 5 canicas y 8 cajas. Encuentre el número de formas de colocarlas si

    a) las canicas son distinguibles y ninguna caja puede tener más de una canica,
    b) las canicas son indistinguibles y ninguna caja puede tener más de una canica,
    c) las canicas son distinguibles y cada caja puede contener cualquier número de canicas,
    d) las canicas son indistinguibles y cada caja puede contener cualquier número de canicas.

    Sugerencia: piense en las cajas como elementos que son seleccionados por las canicas.

27. Sea B_n el número de particiones de un n-conjunto. Entonces

    $$B_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$$

    para $n > 0$, tomando $B_0 = 1$. Estos son los números de Bell.

a) Demuestre que

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

Sugerencia: ¿de cuántas maneras se puede construir una partición de un n-conjunto agregando un bloque de cardinalidad k a una partición de un conjunto de los $n-k$ elementos restantes?

b) Use la fórmula para determinar B_6 y B_7.

28. Los números de Lucas están definidos por la recurrencia

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2}, \\ L_1 &= 1, \\ L_2 &= 3. \end{aligned}$$

Obtenga una fórmula cerrada para L_n.

29. Obtenga la solución en forma cerrada de la recurrencia

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= 11. \end{aligned}$$

30. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "paralelepípedo"?

31. En una muestra de infectados de covid-19 el 87.5 % manifestó al menos uno de tres síntomas. Más específicamente, el 60.4 % manifiesta tos persistente, el 64.6 % pérdida de olfato o gusto, el 42.7 % fiebre y el 56.8 % al menos dos síntomas. ¿Qué porcentaje tuvo los tres síntomas?

32. ¿Existe un grafo simple tal que los grados de sus vértices sean la sucesión

$$(1, 1, 2, 2, 2, 3)?$$

¿Y uno con $(1, 2, 2, 3, 4)$? Explique.

33. Demuestre que un grafo simple tal que el grado de cada vértice es mayor o igual a $\frac{1}{2}(|V| - 1)$ es conexo. *Sugerencia:* si supone que el grafo tiene al menos dos componentes, ¿cuántos vértices como mucho puede tener la componente más pequeña?

34. ¿Cuántas aristas deben removerse de un grafo conexo $G(V, E, \phi)$ para obtener un árbol generador del mismo?

35. Encuentre todas las distancias más cortas sobre la Tierra entre Oaxaca de Juárez, San Juan Bautista Tuxtepec, Salina Cruz, Juchitán de Zaragoza y Huajuapan de León y calcule el árbol generador mínimo del grafo K_5 ponderado correspondiente.

36. Demuestre que si un grafo bipartito $G = (A \cup B, V, \phi)$ es hamiltoniano, entonces $|A| = |B|$.

37. ¿Pueden colocarse las 28 fichas del dominó estándar en un ciclo de modo que empaten del modo usual? Si es posible, constrúyalo. *Sugerencia:* ¿qué tendría que ver K_7 en todo esto?