**Ejercicios**
Materia: Investigación de Operaciones
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre 2022-2023 A
Ingeniería en Computación
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 18 de enero de 2023

1. En un servicio social tenemos dos alumnos que pueden capturar las notas de una materia en 3 y 4 días, respectivamente. Dado que una profesora tiene 7 materias que capturar, ¿cuál es el tiempo mínimo que necesitan los alumnos para completar la captura? Los alumnos deben proceder secuencialmente, es decir, deben terminar de capturar una materia antes de empezar con otra. Plantee las tres preguntas, respóndalas y resuelva el problema.

2. Lleve los siguientes programas a su forma estándar.

   *a*)

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 + x_2 + 5x_3, \\ \text{s. a} & \begin{cases} 1 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2 \leq x_2 + x_3 \leq 6, \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

   *b*)

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 - x_2 + x_3, \\ \text{s. a} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2, x_3 \leq 1. \end{array}$$

3. Reconsidere el problema dietético pero suponga que ahora también hay una ingesta máxima $d_j$ del nutriente $j$-ésimo. Plantee las tres preguntas, respóndalas, escriba el programa lineal y páselo a su forma estándar.

4. Formule las tres preguntas y respóndalas para el problema de manufactura.

5. Una persona puede elaborar dos productos, A y B. El volumen de ventas de A es al menos el 80 % de las ventas conjuntas de A y B. Sin embargo, no se pueden vender más de 7.5 unidades de $A$ al día. Ambos productos requieren de una misma materia prima; 0.25 unidades de materia prima por una unidad de A y 0.08 por una de B. Se dispone de un máximo de 2 unidades de materia prima al día. Las ganancias unitarias por la venta de A y B son 20 y 25 pesos, respectivamente. Encuentre los niveles de producción de A y B que maximizan la ganacia diaria de la persona utilizando el método gráfico.

6. Encuentre todas las soluciones básicas del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \ \ x_4 = 2, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

7. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \ \ x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 1, \\ \quad x_2 \qquad\qquad\quad - \ \ x_6 + 2x_7 = 3, \\ \qquad x_3 \quad - 2x_5 \qquad + \ \ x_7 = 2, \\ \qquad\quad x_4 - \ \ x_5 - \ \ x_6 - \ \ x_7 = 5. \end{cases}$$

   *a*) Encuentre la solución básica con variables básicas $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

   *b*) Respecto a las variables básicas del inciso anterior, ¿es posible que $x_2$ abandone la base e ingrese $x_5$? ¿Es posible que $x_2$ abandone la base e ingrese $x_7$? En caso afirmativo, calcule la nueva solución básica.

8. Considerando al sistema del ejercicio anterior y la solución básica factible asociada a las variables básicas $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, determine a cuál debe reemplazar $x_5$ para que no se pierda la factibilidad cuando ingrese a la base.

9. En un taller se fabrican los productos A y B. No se pueden producir más de 50 unidades de A o más de 40 unidades de B. Una unidad de A requiere 2 m$^3$ de almacenaje y una de B requiere 3 m$^3$, y se dispone de un máximo de 200 m$^3$ de almacén. La ganancia por una unidad de A es \$ 11 y por una de B es \$ 15. Plantee este problema como un programa lineal y resuélvalo usando el algoritmo símplex.

10. Tres procesos en una fábrica producen los bienes A y B, según la siguiente tabla.

| Proceso | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Bien | A | 30 % | 20 % | 50 % |
| | B | 70 % | 80 % | 50 % |

    Los costos unitarios para los procesos son \$ 37, \$ 43 y \$ 81, respectivamente. Se requieren 10 unidades de $A$ y 15 unidades de B. Formule el programa lineal para encontrar el menor costo de operación y resuélvalo primero por el método de las dos fases y luego por el de la gran M.

11. Verifique que el dual del dual es el primal para la forma simétrica de la dualidad.

12. Encuentre el dual del programa que resolvimos geométricamente el 12 de octubre de 2022, a saber:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 120x + 140y, \\ \text{s. a} \quad & 40x + 80y \leq 4400, \\ & 3x + 2y \leq 150, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

13. *a*) Encuentre el dual del problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, \\ \text{s. a} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 = 2, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - y_2 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

    *b*) Usando el teorema de holgura complementaria y la solución calculada del primal (a saber, $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (0, 1/4, 1/2, 0, 0)$), indique cuáles restricciones del dual están activas, y úselas para resolver el dual.

14. Se tienen tres alimentos con las características de la tabla.

| Alimento | Precio por porción ($) | Energía por porción (kcal) | Proteínas por porción (g) |
|---|---|---|---|
| Galleta | 0.93 | 25.00 | 0.00 |
| Yogur bebible | 4.00 | 54.00 | 2.40 |
| Manzana | 6.00 | 72.00 | 0.36 |

Si se requieren para un desayuno al menos 600 kilocalorías y 20 g de proteína entonces formule el programa para obtener el desayuno de costo mínimo. Use el algoritmo dual-símplex para resolverlo. Escriba explícitamente cuántas porciones se deben consumir de cada alimento.

15. Use los algoritmos de esquina noroeste, de costo mínimo y de Vogel para encontrar soluciones básicas factibles del siguiente problema de transporte.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | $\boxed{9}$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{2}$ | $\boxed{6}$ | $\boxed{4}$ | 20 |
| $\boxed{6}$ | $\boxed{4}$ | $\boxed{2}$ | $\boxed{7}$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{2}$ | 20 |
| $\boxed{8}$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{7}$ | $\boxed{2}$ | $\boxed{9}$ | $\boxed{3}$ | 10 |
| 8 | 5 | 6 | 4 | 15 | 12 | |

Determine los costos totales de cada solución.

16. Use el algoritmo dual-símplex para el problema de transporte para obtener el costo óptimo de envío del problema del ejercicio anterior. Use como solución básica inicial la obtenida por esquina noroeste.

17. Sea el programa lineal entero

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & 5x_1 + 8x_2, \\
\text{s. a} & \begin{cases} x_1 + \phantom{11}x_2 \leq 7, \\ 6x_1 + 11x_2 \leq 66, \end{cases} \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{array}
$$

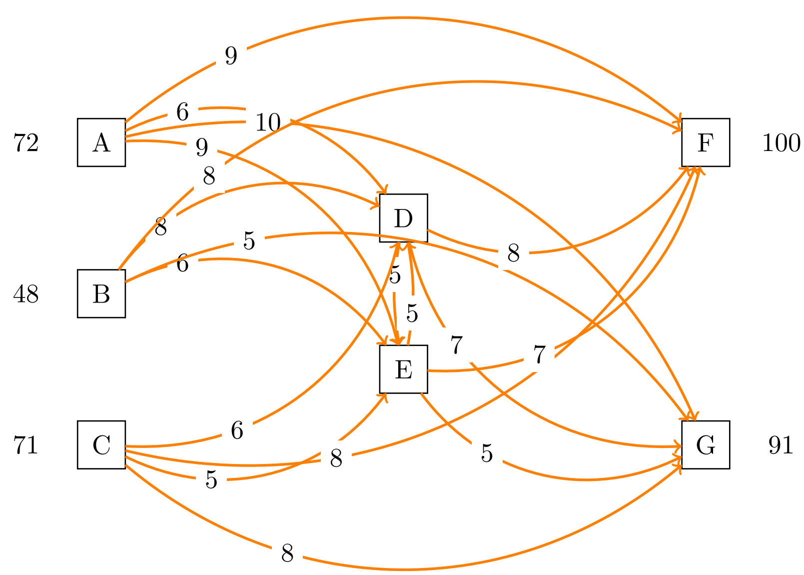
*a*) Resuélvalo por medio de cortes de Gomory.

*b*) Verifique su solución usando el comando `glpk` de Octave, invocándolo según

$>>$ `glpk(c,A,b,[0,0],[],«UU»,«II»)`

Incluya la sesión de usario completa.

18. Resuelva el siguiente problema de transbordo reduciéndolo a uno de transporte.



19. Resuelva el problema de asignación de costo mínimo correspondiente a la información de la siguiente tabla.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 | 2 | 10 | 3 |
| 8 | 7 | 2 | 7 | 5 |
| 6 | 4 | 2 | 7 | 5 |
| 8 | 4 | 2 | 3 | 5 |
| 9 | 10 | 6 | 9 | 10 |

20. Los cimientos de un edificio deben completarse en tres secciones consecutivas. Las actividades de cada sección incluyen:

    *a*) Excavación.
    *b*) Armado de cadenas.
    *c*) Colocación de cadenas y cimbra.
    *d*) Colado.

    Por las características del proyecto no se pueden iniciar las excavaciones en una sección sino hasta concluir la de la precedente. Existe la misma restricción para el colado. Construya una tabla de precedencias del proyecto considerando que la excavación toma 3 días, los armados 2 días, la colocación 1 día y el colado 7 días, y construya el grafo correspondiente.

21. Con los datos del ejercicio anterior, calcule la ruta crítica, obtenga el diagrama de Gantt, las flotaciones y las actividades que se deben marcar con bandera roja.

22. Rehaga los cómputos de PERT para el proyecto del desayuno pero usando las fórmulas asociadas a la distribución beta.

23. Suponga que para la planeación de producción en una fábrica se tienen que considerar cinco meses con demandas $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 4$. El costo fijo de operación es \$ 4000, el costo unitario de producción es \$ 1000 y el costo de almacenamiento unitario es \$ 350. Obtenga el esquema óptimo de producción usando programación dinámica.

24. Suponga que debido a una actualización de *software* ahora el cajero tiene un tiempo de atención medio de 3 minutos. La tasa de llegadas de clientes sigue siendo de 10 por hora.

    *a*) Recalcule el factor de utilización del cajero, la cantidad promedio de clientes en el sistema, en la fila y los tiempos promedio correspondientes.
    *b*) Calcule la probabilidad de que haya 4 o más usuarios en el sistema.

25. En las condiciones del ejercicio anterior ¿cuánto más ágil debe ser la atención del cajero para que la probabilidad de que haya 4 o más clientes en el sistema sea solamente del 5 %? ¿Cuál es el nuevo tiempo de espera en el sistema? Explicite todos sus cálculos.

26. En las condiciones del ejercicio 24, recalcule el factor de utilización del sistema, la cantidad de clientes promedio en el sistema y en la fila y los tiempos de espera correspondientes, suponiendo que se coloca un cajero idéntico adicional. Obtenga también la probabilidad de que haya 4 o más usuarios en el sistema.

27. Con las condiciones del ejercicio 24 construya una hoja de cálculo o programe en su lenguaje favorito la simulación requerida para la recursión de Lindley $W_0 = 0$, $W_{n+1} = \max\{0, W_i + X_i - Y_i\}$, córrala para $n = 50, 100, 150, 200$ y reporte el tiempo medio de espera, de atención y de intervalo entre clientes. Estime también la probabilidad $P_0$ a partir de esta simulación.

28. Suponga que para cierto bien el costo de fabricación de $q$ unidades es $c(q) = 5 + \frac{10}{1+e^{-(q-5)}}$ y se pueden vender a un precio $p(q) = 200e^{-\sqrt{q}}$.

    *a*) Escriba la función de utilidad $u(q)$ y grafique las tres funciones.

    *b*) Use el método de Newton para encontrar la cantidad de unidades que maximiza la utilidad con una tolerancia $\epsilon = 0.01$ y una cantidad inicial $q_0 = 1$.

29. Supongamos que se produce un bien con un costo unitario de USD 3.50. Los costos fijos de operación son de USD 15000. Dicho bien se vende tanto en EE. UU. como en Canadá, a precios según informa la siguiente tabla considerando el tratado de libre comercio.

| Mercado | Precio | Respuesta del precio en Canadá | Respuesta del precio en EE. UU. |
|---|---|---|---|
| Canadá | USD 85 | USD $-0.07$ | USD $-0.02$ |
| EE. UU. | USD 100 | USD $-0.01$ | USD $-0.10$ |

    *a*) Encuentre la función de ingresos $R(x, y)$, de costos $C(x, y)$ y de utilidad $U(x, y)$, donde $x$ es el número de unidades vendidas en EE. UU. y $y$ el número de unidades vendidas en Canadá.

    *b*) Use el algoritmo de máximo ascenso para estimar la utilidad óptima con una tolerancia $\epsilon = 0.1$, con una aproximación inicial $x_0 = 400$ y $y_0 = 350$.