

Ejercicios

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Materia: Investigación de Operaciones

Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino

Semestre: 20-21 B

Carrera: Ingeniería Industrial

Última actualización: 20 de mayo de 2021.

1. Suponga que se recibe un tronco partido a la mitad por el diámetro. El diámetro del tronco original mide 20 pulgadas. Recordando que la resistencia de una viga es directamente proporcional al producto de su ancho y el cuadrado de la altura ¿de qué tamaño es la viga de perfil rectangular más resistente que puede cortarse de esta mitad de tronco circular? Escriba su solución de acuerdo al modelo presentado en clase. Observe también que, a diferencia de lo que ocurre dada la simetría de un tronco circular completo, aquí no dan lo mismo las dos orientaciones posibles de la viga.
2. Lleve los siguientes programas a su forma estándar.

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & x - y + 2z, \\ \text{s. a} \quad & 0 \leq 2x + y \leq 1, \\ & x + z = 2, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & x, \\ \text{s. a} \quad & x + y + z = 3, \\ & 0 \leq z \leq 1, y \geq 0. \end{aligned}$$

3. Una compañía que fabrica cajas en dos tamaños debe determinar la mezcla óptima semanal, según los siguientes datos.

| Producto | Caja grande | Caja pequeña |
|--------------------|-------------|--------------|
| Beneficio | 20 | 15 |
| Material requerido | 6 | 5 |

Se deben elaborar por lo menos 10 cajas grandes y a lo más 12 cajas chicas, y se dispone de 156 pies cuadrados de material. Plantee las tres preguntas, respóndalas y escriba el programa lineal correspondiente para maximizar el beneficio total. Posteriormente, póngalo en forma estándar.

4. Una granjera posee 35 acres de tierra. En cada acre, puede plantar maíz o trigo. Cada acre de trigo reporta 200 dólares de beneficio, mientras que cada acre de maíz reporta 300 dólares. Los requerimientos de trabajo y fertilizante son como sigue.

| Cultivo | Trigo | Maíz |
|--------------------------|-------|------|
| Trabajo (horas) | 3 | 2 |
| Fertilizante (toneladas) | 2 | 4 |

Se dispone de cien horas de trabajo y 120 toneladas de fertilizante. Plantee el programa lineal para resolver el problema de maximizar el beneficio del cultivo, y resuélvalo de forma gráfica.

5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

y el sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Encuentre las otras dos soluciones básicas del sistema, además de la vista en clase (que es la asociada a las variables básicas $\{x_1, x_2\}$). Verifique en cada caso que la matriz proveniente de la base es invertible.

6. Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde las variables básicas para una solución básica pueden elegirse como $\{x_1, x_2, x_3\}$, determine si la variable x_2 puede dejar de ser básica y ser reemplazada por x_6 . De ser así, encuentre la nueva solución básica. ¿Es factible? Explique.

7. Pase el programa del Ejercicio 4 a su forma estándar y resuélvalo usando el algoritmo simplex.

8. En clase se vió una tabla simplex

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -6 & -4 & -3 & 0 & 0 & -5 \end{array}$$

y se hizo ingresar a la variable de la tercera columna. Repita el algoritmo simplex a partir de esta tabla inicial pero usando la columna con coeficiente de costo relativo más negativo.

9. Resuelva el siguiente programa usando el método de las dos fases.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x_1 + x_2 + 3x_3, \\ & \text{sujeto a} && 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ & && 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

10. Resuelva el programa del ejercicio anterior usando el método de la gran M .
11. Encuentre el dual de los siguientes programas.

a)

$$\begin{aligned} & \text{mín} && x_1 + 2x_2, \\ & \text{s. a} && x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \text{máx} && 2x_1 - 3x_2 + x_3, \\ & \text{s. a} && x_1 + x_2 = 2, \\ & && x_2 + x_3 = 1, \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

12. Encuentre el programa dual del programa del ejercicio 4, y encuentre la solución del mismo por medio de la tabla simplex del primal.
13. Use la solución del dual del ejercicio anterior para calcular el cambio en el beneficio obtenido en el ejercicio 4, suponiendo que disminuye en 10 el número de horas de trabajo pero aumenta en 5 toneladas la disponibilidad de fertilizante. ¿Cuál de los tres factores (tierra disponible, horas de trabajo o toneladas de fertilizante) que influyen en el beneficio tiene mayor efecto en el mismo?
14. Use el algoritmo dual-símplex para encontrar la solución del siguiente programa.

$$\begin{aligned} & \text{mín} && 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4, \\ & \text{s. a} && 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 4, \\ & && 5x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 2, \\ & && 3x_1 + 4x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

15. Use las heurísticas de esquina noroeste, costo mínimo y de Vogel para encontrar una solución básica factible del problema de transporte representado en la siguiente tabla. Proporcione los detalles en cada caso.

| | | | | |
|----|---|----|---|----|
| 12 | 2 | 10 | 6 | 10 |
| 9 | 4 | 6 | 4 | 12 |
| 9 | 7 | 3 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 6 | 7 | |

16. Use cualquiera de las soluciones básicas obtenidas en el ejercicio anterior para encontrar la solución óptima del problema de transporte planteado usando el algoritmo manual.
17. Para repartir tareas entre un equipo de trabajadores, tenemos la siguiente tabla de cuáles personas P_i tienen la capacitación para hacer la tarea Q_i .

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|----|----|----|----|----|----|----|
| Q1 | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ |
| Q2 | ✓ | | ✓ | | ✓ | |
| Q3 | | | | ✓ | ✓ | |
| Q4 | ✓ | | ✓ | | ✓ | |
| Q5 | ✓ | ✓ | | | | |
| Q6 | | | ✓ | ✓ | ✓ | |

Usando el algoritmo de Egerváry-König determine si es posible hacer seis parejas que tengan el mejor desempeño o, en su defecto, cuál es el conjunto de personas tal que no se satisface la condición de Hall.

18. Hay cuatro paquetes de ayuda para cinco equipos de atletas, y se ha estimado la siguiente tabla de cuántas medallas se esperaría obtener según sea la asignación (el guión representa que el equipo no es elegible para el apoyo).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | — | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | — | — | 3 |

Suponiendo que un paquete se puede asignar a solamente un equipo de atletas, encuentre la asignación que maximice el número de medallas que se pueden obtener. Obtenga la cubierta fraccionaria que certifique el cálculo.

19. Una compañía está planeando su estrategia de ventas para tres de sus principales productos. Puesto que son lo suficientemente diferentes, cada campaña se enfocará en un solo producto. Se dispone de 6 millones de dólares. Hay que asignar una cantidad entera de millones de dólares a la promoción de cada producto, de modo que se maximicen las ventas

esperadas. Resuelva detalladamente este problema usando programación dinámica.

| Gasto | Producto 1 | Producto 2 | Producto 3 |
|-------|------------|------------|------------|
| 1 | 6 | 4 | 5 |
| 2 | 10 | 8 | 9 |
| 3 | 14 | 11 | 13 |
| 4 | 17 | 14 | 15 |

20. Resuelva el problema de pedidos para inventario por trimestres en un año de costo óptimo, suponiendo las demandas son $d_1 = 16, d_2 = 8, d_3 = 45, d_4 = 85$, el costo de pedido es $A = 1000$ y el costo de mantenimiento es de $h = 10$ por unidad y periodo.
21. En un consultorio con un solo médico el tiempo de atención promedio por paciente es de 18 minutos, y llega un paciente en promedio cada 30 minutos.
 - a) Encuentre el factor de utilización del tiempo del médico, la cantidad promedio de pacientes en el sistema, en la cola y los tiempos medios de espera correspondientes.
 - b) Determine cuántos asientos hay que instalar de modo que con una probabilidad de al menos el 90 % cualquier paciente encuentre al menos un asiento desocupado.
22. Con las condiciones del ejercicio anterior, recalcule el factor de utilización del sistema, la cantidad promedio de pacientes en el sistema, en la cola y los tiempos medios de espera correspondientes suponiendo que en el consultorio atienden tres médicos con idéntico tiempo promedio de atención.
23. Con las condiciones del ejercicio anterior, suponga que en promedio el beneficio por paciente para el consultorio es de \$ 50, y que cada médico recibe un salario fijo de \$ 1200 diarios por ocho horas de trabajo. Encuentre el número más pequeño de médicos que debe tener el consultorio para que salga a flote.