**Ejercicios**
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Materia: Investigación de Operaciones
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 20-21 A
Carrera: Ingeniería en Computación
Última actualización: 23 de enero de 2021.

1. Una impresora debe imprimir 3 documentos en un tiempo de 3 minutos. Toman 128, 47 y 5 segundos, respectivamente, y deben estar listos a más tardar en los minutos 1, 2 y 3 desde el inicio de operación de la misma, respectivamente. La *tardanza* de un proceso es el máximo entre 0 y la diferencia entre el tiempo de término y el tiempo límite. Considere el problema de minimizar la tardanza máxima de los trabajos de impresión. Formule y responda las tres preguntas del problema como uno de decisión y resuélvalo.

2. Lleve los siguientes programas a su forma estándar.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x - y + 2z, \\ \text{s. a} \quad & 1 \leq 2x + y \leq 3, \\ & x + z = 2, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z, \\ \text{s. a} \quad & x + y + z = 2, \\ & x \leq 1, y \geq 0. \end{aligned}$$

3. Considere la siguiente variante del problema dietético: hay $m$ nutrientes en $n$ diferentes alimentos. Los precios de cada alimento son $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Debemos consumir al menos las cotas $b_1, \ldots, b_m$ de cada uno de los $m$ nutrientes, pero no más de las cotas $d_1, \ldots, d_m$ de ellos. El alimento $j$-ésimo contiene una fracción $a_{ij}$ del nutriente $i$-ésimo por unidad de masa. Plantee las tres preguntas, respóndalas y escriba el programa lineal correspondiente para minimizar el costo de la despensa. Posteriormente, póngalo en forma estándar.

4. Una fábrica puede usar todo su concreto en elaborar o bien 100 postes o bien 300 registros de baja tensión por día (aunque puede hacer, por ejemplo, 70 postes y 30 registros). La demanda diaria es de 50 postes y 12 registros de baja tensión. La utilidad por poste es de 250 pesos y por registro de baja tensión es de 150. Después de plantear las tres preguntas y contestarlas, escriba el programa lineal correspondiente para encontrar la combinación de producción diaria óptima.

5. Una persona puede elaborar dos productos, $A$ y $B$. El volumen de ventas de $A$ es menos de la mitad de las ventas conjuntas de $A$ y $B$. Sin embargo, no se pueden vender más de 20 unidades de $B$ al día. Ambos productos utilizan una materia prima, y se dispone a lo más de 2 unidades de la misma por día. Se usan 0.25 y 0.08 unidades de dicha materia para elaborar una unidad de $A$ y $B$ respectivamente. Las ganancias unitarias por la venta de $A$ y $B$ son 0.7 y 2 pesos, respectivamente.

   *a*) Escriba las tres preguntas, respóndalas y plantee el programa lineal correspondiente al problema.

   *b*) Encuentre los niveles de producción de $A$ y $B$ que maximizan la ganancia de la persona utilizando el método gráfico.

6. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   *a*) Verifique si las columnas primera y tercera son linealmente independientes de la matriz por medio de un determinante.

   *b*) Invierta la matriz que resulta de seleccionar la primera y tercera columnas.

   *c*) Use la inversa para encontrar una solución básica del sistema.

   *d*) Repita los tres incisos anteriores para las columnas segunda y tercera.

7. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   cuyas variables básicas son $x_1$, $x_2$ y $x_3$.

   *a*) Explique por qué es posible hacer básica a la variable $x_6$ en sustitución de $x_3$.

   *b*) Realice el pivoteo correspondiente para el cambio.

   *c*) Escriba la solución básica correspondiente.

8. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuyas variables básicas son $x_1$, $x_2$ y $x_3$. Determine por cuál de las variables básicas se pude cambiar a $x_5$ para obtener otra solución factible, realice el pivoteo correspondiente y calcúlela.

9. En un taller de artesanías se elaboran dos tipos de figurillas. Las figurillas de tipo A requieren 50 % más trabajo que las del tipo B. Si solamente se hicieran figurillas de tipo B, entonces se puede fabricar un máximo de 30 al día. Diariamente, se puede vender un máximo de 10 figurillas de tipo A o 21 figurillas tipo B. La utilidad por cada figurilla de tipo A es 50 pesos, mientras que por una de tipo B es de 10 pesos.

   *a*) Escriba las tres preguntas, respóndalas y plantee el programa lineal correspondiente al problema.

   *b*) Estandarice el programa.

   *c*) A partir de la base dada por las variables de holgura, escriba la tabla símplex inicial.

   *d*) Aplique el algoritmo símplex y encuentre la mezcla óptima de producción de figurillas.

10. Aplique el algoritmo símplex para encontrar la solución óptima del siguiente programa lineal.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - 5x_2 - x_3, \\ \text{s. a} \quad & -x_1 + 5x_2 - x_3 + y_1 = 4, \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + y_2 = 3, \\ & -x_1 + x_2 - 4x_3 + y_3 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

   Considere que puede una base que da una solución básica factible es $\{y_1, y_2, y_3\}$.

11. Resuelva el siguiente programa lineal en forma estándar por el método de las dos fases.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4, \\ \text{s. a} \quad & 4x_1 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ & x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

12. Resuelva el programa del ejercicio anterior usando el método de la gran $M$.

13. Demuestre que el programa dual del dual es el primal en la forma simétrica de la dualidad.

14. Encuentre el dual de los siguientes programas.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 \\ \text{s. a} \quad & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{s. a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

15. En una fábrica se elaboran semanalmente dos productos con dos insumos principales, según la siguiente tabla.

| Producto | Insumo 1 | Insumo 2 |
|---|---|---|
| B | 2 | 18 |
| K | 4 | 60 |

La disponibilidad máxima del insumo 1 es de 50 unidades, y del insumo 2 es de 500 unidades. Debido a un contrato, no se pueden fabricar más de 5 unidades del producto $K$ a la semana. La utilidad de una unidad de K sobre una de B es 4.3 veces mayor.

*a*) Plantee el programa lineal para maximizar la utilidad de la fábrica, y resuélvalo con el simplex.

*b*) Encuentre la solución del programa dual.

*c*) Use la solución del programa dual para calcular el cambio en la utilidad si se renegocia el contrato de modo que se reduce en una unidad el número máximo de unidades de K a fabricar a la semana, pero aumenta en una unidad la disponibilidad del insumo 2.

Puede usar Octave para realizar los pivoteos.

16. En el ejercicio anterior, suponga que se buscan soluciones enteras. Calcule el óptimo usando cortes de Gomory. Puede usar Octave para realizar los pivoteos.

17. Cuatro silos distribuyen grano a cuatro molinos. Los costos de transporte en pesos por kilogramo están dados en la siguiente tabla (las filas repre-

sentan a los silos, las columnas a los molinos).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 13 | 13 | 19 | 10 |
| 19 | 10 | 15 | 18 | 20 |
| 13 | 11 | 12 | 13 | 10 |
| 12 | 19 | 16 | 10 | 10 |
| 5 | 15 | 15 | 15 | |

Calcule tres solución básicas factibles iniciales para el problema usando los algoritmos de la esquina noroeste, de costo mínimo y de Vogel. Calcule el costo total del envío en cada uno. En algunos casos es necesario hacer cero algunas variables básicas.

18. Encuentre la solución óptima del problema de transporte del ejercicio anterior con la siguiente solución básica inicial.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17\| | 13\| | 13\| | 19\|10 | 10 |
| 19\| | 10\|0 | 15\|15 | 18\|5 | 20 |
| 13\| | 11\|10 | 12\| | 13\| | 10 |
| 12\|5 | 19\|5 | 16\| | 10\| | 10 |
| 5 | 15 | 15 | 15 | |

19. Para formar parejas para un baile en un festival, hay dos grupos de seis personas cada uno. He aquí la tabla de cuales tienen el mejor desempeño juntas.

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q1 | | | ✓ | | | ✓ |
| Q2 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Q3 | | ✓ | ✓ | | | |
| Q4 | | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| Q5 | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| Q6 | | ✓ | | | ✓ | |

Usando el algoritmo de Egerváry-Kőnig determine si es posible hacer seis parejas que tengan el mejor desempeño o, en su defecto, cuál es el conjunto de las Q tal que no se satisface la condición de Hall.

20. Resuelva el siguiente problema de asignación, donde las filas indican el personal y las columnas las tareas, de modo que se maximice el puntaje total obtenido por el equipo. Un guión indica que la persona no puede ejecutar la tarea. Muestre la cubierta fraccionaria que certifique el cómputo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 7 | 5 | – |
| 4 | 8 | 8 | 4 | – |
| 8 | – | 8 | 6 | – |
| 10 | 3 | 4 | 4 | 6 |
| 6 | – | – | – | 4 |

21. Se tiene la siguiente información de un proyecto que consiste de seis actividades.

| Actividad | Predecesores | Duración estimada (meses) |
|---|---|---|
| A | – | 6 |
| B | – | 6 |
| C | B | 1 |
| D | C | 2 |
| E | A,C | 4 |
| F | D,E | 5 |

*a*) Construya la red del proyecto.

*b*) Encuentre la ruta crítica y el tiempo mínimo de ejecución del proyecto.

*c*) Construya el diagrama de Gantt y determine las actividades que deben marcarse con bandera roja.

22. Considerando el mismo proyecto del ejercicio anterior, considere los siguientes tiempos estimados como pesimista, más probable y optimista.

| Actividad | Duraciones estimadas (meses) |
|---|---|
| A | $(5, 6, 7)$ |
| B | $(4, 6, 5)$ |
| C | $(1, 1, 3)$ |
| D | $(1, 2, 3)$ |
| E | $(2, 4, 5)$ |
| F | $(4, 5, 7)$ |

*a*) Encuentre la duración media y la varianza de cada actividad usando las fórmulas asociadas a la distribución beta.

*b*) Encuentre la ruta crítica.

*c*) Estime la probabilidad de terminar el proyecto en 16 meses o menos.

23. Un estudiante tiene siete días para prepararse para el examen de cuatro materias. Debe estudiar al menos un día para cada una, sólo estudiar una materia cada día, y decide no dedicar más de cuatro días a cada materia. Sus estimados de los puntajes que espera obtener según los días que estudie cada materia aparecen en la siguiente tabla.

| Días de estudio\Puntaje por materia | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 |
| 2 | 5 | 6 | 4 | 7 |
| 3 | 6 | 6 | 7 | 9 |
| 4 | 7 | 9 | 8 | 9 |

Resuelva el problema de optimizar la suma total de calificaciones del estudiante usando programación dinámica. *Sugerencia:* se pueden tomar como etapas las materias y como estado el número de horas estudiadas. Observe que, en tal caso, no tiene que calcular todas las entradas de la tabla, pues hay varias combinaciones de horas que no serían factibles.

24. Un cajero automático es tal que atiende a 11 clientes por hora. Cada cliente tarda en promedio 4 minutos en ser atendido.

    *a*) Encuentre el factor de utilización del cajero, la cantidad promedio de clientes en el sistema, en la cola y los tiempos medios de espera correspondientes.

    *b*) Calcule la probabilidad de que haya dos o más usuarios en el sistema.

25. Con las condiciones del ejercicio anterior, recalcule el factor de utilización del sistema, la cantidad promedio de clientes en el sistema, en la cola y los tiempos medios de espera correspondientes suponiendo que el banco coloca otros dos cajeros automáticos idénticos al primero en la sucursal.