Ejercicios
Métodos Numéricos
Semestre 2019-2020 B
Ingeniería en Física Aplicada
Última actualización: 13 de mayo de 2020.

1. Tomando como aproximación a $p = \pi$ el número racional $\tilde{p} = \frac{355}{113}$, calcule el error relativo y absoluto de $\tilde{p}^5$ en relación a p^5.

2. Libro de Leon Q. Brin, sección 1.1, ejercicio 24, inciso b), página 9.

3. Libro de Leon Q. Brin, sección 1.2, ejercicio 14, inciso a), página 17.

4. Escribir el pseudocódigo del algoritmo de falsa posición modificando el de bisección, implementarlo en Octave y usar el programa para resolver el ejemplo de clase con una tolerancia en el error absoluto de 1×10^{-3}. Indicar el número de iteraciones requerido.

5. Libro de Leon Q. Brin, sección 2.1, ejercicio 5, inciso a), página 43. [Con m_3 quiere decir que hay que ejecutar tres iteraciones del algoritmo].

6. Libro de Leon Q. Brin, sección 2.4, ejercicio 8, página 71, pero con $x_0 = 3$ en lugar de $x_0 = 1.25$.

7. *a*) Traduzca lo relativo a la sección "Secant method" de la página 67 del libro de Leon Q. Brin hasta la ecuación (2.4.1) y cópielo al cuaderno.

   b) Suponiendo que $f(x) = \frac{100}{x^2}\operatorname{sen}(10/x)$, $x_0 = 3.5$, $x_1 = 3$, tenemos que
   $$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 3.24016\ldots.$$
   Calcule x_3, x_4 y x_5.

8. *a*) Traduzca el primer y el tercer párrafos de la sección "Fixed point iteration" de la página 46 del libro de Leon Q. Brin y cópielo al cuaderno. Ejecute lo que dice el primer párrafo, copie la gráfica 2.2.1 y ubique los puntos correspondientes.

   b) Traduzca y copie la proposición 3 y el teorema 4 de la página 48 del libro de Leon Q. Brin.

c) Vea el video `www.youtube.com/watch?v=5sUWIOh4-Po`. Este inciso, obviamente, no me lo tienen que entregar.

d) Libro de Leon Q. Brin, sección 2.2, ejercicio 11, página 54.

9. *a*) Descargue el libro de Young y Mohlenkamp en `http://ohiouniversityfaculty.com/youngt/IntNumMeth/book.pdf` Traduzca y copie al cuaderno la sección “Triangular matrices and backsubstitution” (hasta antes de “Gaussian Elimination”), página 41.

   b) Resuelva, por *sustitución hacia adelante*, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   considerando que la primera ecuación se lee $x_1 = 4$, la segunda $-2x_1 - x_2 = 7$, de modo que de esta se puede obtener el valor de x_2, y luego usando los valores ya obtenidos de x_1 y x_2 y la última ecuación $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4$ para hallar x_3.

10. *a*) Traduzca y copie la sección “LU decomposition” (hasta antes de “Using LU to solve equations”), páginas 50 y 51 del libro de Young y Mohlenkamp.

   b) Vea el video `https://www.youtube.com/watch?v=LGIe9nuNdbo`. Este inciso no me lo tienen que entregar.

   c) Calcule manualmente la descomposición LU de la siguiente matriz como se describe en el texto. Proporcione los detalles.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Puede comprobar su cómputo usando Octave.

   d) Resuelva, por sustitución hacia adelante, la solución del sistema

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y luego resuelva, por sustitución hacia atrás, el sistema

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

11. *a*) Descargue el documento
`https://www.maths.manchester.ac.uk/~higham/papers/high09c.pdf`
y traduzca y copie toda la introducción y la sección "Computation" hasta la frase "[...] real, positive diagonal".

b) La prueba de escritorio para el algoritmo, con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

corre como sigue.

- $r_{1,1}^2 = 8$; $r_{1,1} = 2.8284$.
- $r_{1,1}r_{2,1} = 5$; $r_{2,1} = 5/2.8284 = 1.7678$.
- $r_{1,1}r_{3,1} = 4$; $r_{3,1} = 4/2.8284 = 1.4241$.
- $r_{2,1}^2 + r_{2,2}^2 = 6$; $r_{2,2} = \sqrt{6 - r_{2,1}^2} = \sqrt{6 - 1.7678^2} = 1.6955$.
- $r_{3,1}r_{1,1} = 4$; $r_{3,1} = 4/r_{1,1} = 4/2.8284 = 1.4142$.
- $r_{3,1}r_{2,1} + r_{3,2}r_{2,2} = 5$; $r_{3,2} = (5 - r_{3,1}r_{2,1})/r_{2,2} = (5 - 1.4142 \times 1.7678)/1.6955 = 1.4745$.
- $r_{3,1}^2 + r_{3,2}^2 + r_{3,3}^2 = 6$; $r_{3,3} = \sqrt{6 - r_{3,1}^2 - r_{3,2}^2} = \sqrt{6 - 1.4142^2 - 1.4745^2} = 1.3513$.

Así, la matriz resultante es

$$R = \begin{pmatrix} 2.8284 & 1.7678 & 1.4142 \\ 0 & 1.6955 & 1.4745 \\ 0 & 0 & 1.3513 \end{pmatrix}$$

Ejecute el algoritmo para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y verifique que su respuesta es correcta con el comando `chol(A)` o calculando la multiplicación $R^T R$.

c) Vea el video `https://www.youtube.com/watch?v=_2mIhsbFKYo`. Este inciso no me lo tienen que entregar.

12. *a*) Traducir y copiar toda la "Lecture 13" (pp. 53-56) del libro de Young y Mohlenkamp.
    b) Ejecutar el programa que aparece en la página 56 y transcribir la salida.
    c) Realizar el ejercicio 13.1, pero en el inciso c encontrar solamente una solución.

13. *a*) Consulte o descargue el libro "Numerical Analysis" de Timothy Sauer en
    `https://archive.org/details/NumericalAnalysis_201903/page/n124`
    o en
    `http://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA/refs/Numerical%20Analysis%202nd.Sauer.2012.pdf`
    b) Traduzca y copie el primer párrafo de la sección 2.5.1 (p. 106) [FPI significa "iteración de punto fijo"], el Ejemplo 2.19, la Definición 2.9, el Teorema 2.10, el Ejemplo 2.21, la página 108 hasta antes del inicio de la sección 2.5.2, la página 109 desde "Gauss-Seidel can be written" hasta el fin del Ejemplo 2.22.
    c) Compute las tres primeras iteraciones $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ de los algoritmos de Jacobi y de Gauß-Seidel con el vector inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ para los siguientes sistemas

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    d) Calcule la norma euclidiana del vector $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}\|$, donde $\mathbf{x}$ es la solución exacta de cada sistema, para los dos algoritmos. En Octave, primero se teclea `A = [3 1; -1 2]`, `b = [5;4]` y luego puede calcularse la solución con `inv(A)*b` (que es usando la inversa de A) o con `rref([A b])` (que es haciendo reducción completa por filas con la matriz aumentada).
    e) Explique por qué se puede saber que los algoritmos de Jacobi y de Gauß-Seidel convergen para los dos sistemas.

14. *a*) Descargue el documento
`https://www.math.usm.edu/lambers/mat461/lecture22.pdf`
y traduzca y copie desde “Now, we can define” de la página 2 hasta el final.

b) En el ejemplo del documento, ejecute diez iteraciones de punto fijo empezando en $\mathbf{x}_0 = (3/5, 3/5)^T$, y calcule la norma euclidiana de entre un punto y el siguiente. Por ejemplo, se tiene que

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}(x_0) = (\sqrt{3/5}, \sqrt{1-(3/5)^2})^T = (0.77460, 0.8)^T,$$
$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| = \sqrt{(3/5 - 0.77460)^2 + (3/5 - 0.8)^2} = 0.26549.$$

15. *a*) Traduzca y copie el primer párrafo de la sección 3.2 de libro de Leon Q. Brin (p. 106), el último parrafo desde “Suppose $n \geq 1$” hasta la ecuación (3.2.2), el primer y el tercer párrafo de la página 107 y el Teorema 7 (p. 114).

b) Si se toman los puntos $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_0, y_0) = (\pi/2, 1)$, $(x_2, y_2) = (\pi, 0)$, que pertenecen a la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces, según la fórmula, el polinomio de interpolación de Lagrange sería

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{p_0(x)}{p_0(x_0)}y_0 + \frac{p_1(x)}{p_1(x_1)}y_1 + \frac{p_2(x)}{p_2(x_2)}y_2 \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 \\
&\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \\
&\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2, \\
&= \frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)} \cdot 0 \\
&\quad + \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} \cdot 1 \\
&\quad + \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi-0)(\pi-\pi/2)} \cdot 0 \\
&= -\frac{4}{\pi^2}(x^2 - \pi x).
\end{aligned}$$

Calcule el polinomio de interpolación de Lagrange ahora para los puntos $(x_i, y_i) = (\frac{i\pi}{4}, \operatorname{sen}(\frac{i\pi}{4}))$ para $0 \leq i \leq 4$.

c) Ejercicio 6, Sección 3.2, del libro de Leon Q. Brin (p.115). En inciso a pide básicamente calcular el polinomio L_1 con el primer y segundo puntos y calcular $L_1(0.3)$, luego L_2 con el primer, segundo y tercer puntos y calcular $L_2(0.3)$, y por último L_3 con los cuatro puntos y calcular $L_3(0.3)$.

16. *a*) Traduzca y copie desde el "Suppose..." hasta el signo de admiración de la sección 3.3 de libro de Leon Q. Brin (p. 117), luego desde "When $n = 0$..." hasta "...to be zero).". Luego desde el "Hence" de la p. 118 hasta la ecuación (3.3.3) y finalmente desde "As an example..." hasta antes del encabezado "Sidi's method" (p. 119).

    b) Vea el video `https://www.youtube.com/watch?v=Cn7bjA5-h3c`.

    c) Ejercicio 7, inciso a) Sección 3.3, del libro de Leon Q. Brin (p.123)

17. *a*) Descargue el documento `https://www.math.usm.edu/lambers/mat419/lecture13.pdf` y traduzca y copie todo desde el encabezado "Least Squares Fit" hasta el fin del Ejemplo 3 de la página 8. Es bastante, lo sé, pero también es muy importante.

    b) Repita con los Ejemplos del 1 al 3, pero con la siguiente tabla.

i	x_i	y_i
1	17	93
2	18	118
3	19	164
4	20	203
5	21	251
6	22	316
7	23	367
8	24	405
9	25	475
10	26	585

18. *a*) Traducir la "Lecture 21" las páginas de la 82 a la 84 del libro de Young y Mohlenkamp (la traducción de "lecture" es "clase", pero no tienen que poner eso en las notas).

b) Modificar la función `myleftsum` para volverla `myrightsum` y calcule la suma la suma derecha. Basta con cambiar una sola línea del código.
c) Realizar el ejercicio 21.1 del libro de Young y Mohlenkamp, pero calculando el error relativo.
d) Definiendo `x = linspace(1.5,6,100), f = @(x) x./log(x)`, encuentre las sumas por la izquierda, por la derecha y del trapecio con las funciones de Octave de los incisos a y b anteriores para estimar $\int_{1.5}^{6} x/\ln(x)\,dx$. Calcule el error relativo, considerando que el resultado exacto a seis decimales es 13.361934.

19. *a*) Traducir la “Lecture 22” las páginas de la 87 a la 89, antes de “Error bounds”, del libro de Young y Mohlenkamp.
b) Realizar el ejercicio 22.1 del libro de Young y Mohlenkamp, pero calculando el error relativo.
c) Realizar el ejercicio 22.2 del libro de Young y Mohlenkamp, pero confirmando solo M_4.
d) Estime $\int_{1.5}^{6} x/\ln(x)\,dx$ con las regla del punto medio y use la última fórmula de la página 87 para calcular la estimación con la regla de Simpson. Encuentre los errores relativos de estos dos cálculos usando la información del ejercicio anterior.

20. *a*) Descargue el documento
`https://www.johndcook.com/OrthogonalPolynomials.pdf`
y traduzca y copie las secciones 1, 2 y 3. No es necesario copiar las demostraciones, pero si las entiendes, hazlo.
b) El segundo polinomio de Legendre es $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, cuyas raíces son $x_0 = -1/\sqrt{3}$ y $x_1 = 1/\sqrt{3}$. Entonces

$$\ell_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-1/\sqrt{3}}{-1/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}} = -\frac{3x-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$
$$\ell_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x+1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}+1/\sqrt{3}} = \frac{3x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

que son los polinomios a partir de los cuales se construye el polinomio de interpolación de Lagrange al multiplicar por y_i y sumar, si observa con cuidado. Los pesos para la fórmula de cuadratura de Gauß-Legendre son entonces

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)w(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} \frac{3x-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot 1\,dx = 1,$$
$$w_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(x)w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot 1\,dx = 1,$$

de modo que la fórmula de cuadratura para dos puntos es

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = 1 \cdot f(-1/\sqrt{3}) + 1 \cdot f(1/\sqrt{3})$$

y es exacta para polinomios de grado hasta 5. ¡Se obtiene evaluando solamente dos puntos! Así, por ejemplo

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = e^{-(-1/\sqrt{3})^2} + e^{-(1/\sqrt{3})^2} = 2e^{-1/3} = 1.43306262\ldots.$$

1) Investigue ahora (los que ya llevaron Métodos Matemáticos de la Física I ya lo tienen) el polinomio de Legendre P_3 y encuentre sus raíces.
2) Escriba los polinomios de Lagrange que se necesitan para encontrar los pesos.
3) Calcule los pesos y escriba la fórmula de cuadratura correspondiente.
4) Aplíquela al integrando e^{-x^2} en el intervalo $[-1,1]$ como ya se hizo con P_2. Encuentre el error absoluto considerando que el valor exacto a seis decimales es 1.493648.

21. *a*) Traducir la "Lecture 29" las páginas de la 116 a la 118 del libro de Young y Mohlenkamp hasta antes de lo de Matlab (la traducción de "lecture" es "clase", pero no tienen que poner eso en las notas).

b) En Octave, para resolver ecuaciones diferenciales se usa `lsode` en lugar de `ode45` (y en mi opinión es más chido el comando de Octave), o sea que en lugar de

```
dy = @(t,y) [y(2); -.1*y(2)-sin(y(1))+ sin(t)]
[T Y] = ode45(dy,[0 20],[1;-1.5])
```

se teclea

```
T = linspace(0,20,100);
```

```
dy = @(y,t) [y(2); -.1*y(2)-sin(y(1))+ sin(t)];
Y = lsode(dy,[1;-1.5],T)
```

Sabiendo esto, resuelva el ejercicio 29.2 del libro de Young y Mohlenkamp.

22. *a*) Traducir toda la "Lecture 30" del libro de Young y Mohlenkamp (excepto lo relativo a lo que se hace con `ode45`).
    b) Resuelva el ejercicio 30.2 del libro de Young y Mohlenkamp.

23. *a*) Traducir la página 124 de la "Lecture 31" del libro de Young y Mohlenkamp.
    b) Resuelva el ejercicio 31.1 del libro de Young y Mohlenkamp.