Ejercicios
Materia: Análisis Numérico
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre 2022-2023 B
Ingeniería en Física Aplicada
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 9 de junio de 2023

1. Se sabe que

$$\begin{aligned} 2.7182818\ldots = e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

   Las sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ son aproximaciones a e.

   a) Calcule las primeras 5 sumas parciales y construya una tabla de error y error absoluto, indicando si el error es por exceso o por defecto. ¿Cae a 0 el error? Explique.

   b) ¿Puede llegar a 0 el error algorítmico de estas aproximaciones? Explique.

2. El n-ésimo número primo p_n se puede aproximar con

$$\tilde{p}_n = n(\ln(n) + \ln(\ln(n)) - 1).$$

   a) Encuentre los primeros 100 primos y calcule el error absoulto y el relativo de $\tilde{p}_n$.

   b) ¿Cae a 0 el error absoluto? ¿Y el relativo?

3. Calcule aproximaciones de la derivada

$$\left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=1} \approx \frac{e(e^h-1)}{h} = \frac{e(e^h-1)}{h} \cdot \frac{e^h+1}{e^h+1} = \frac{e(e^{2h}-1)}{h(e^h+1)}$$

   codificando en Python para $h = 10^{-k}$ con $0 \leq k \leq 10$ y compare el error absoluto con los esquemas $\frac{e^{h+1}-e^1}{h}$ y $\frac{e(e^h-1)}{h}$.

4. Una función como

$$f(t) = 2(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}), \quad t \geq 0$$

   modela la respuesta en voltaje de un circuito CR-RC ante un pulso. Use el algoritmo de bisección para encontrar el instante de tiempo en el que ocurre el pico de voltaje con una tolerancia de 1×10^{-1}. Grafique la derivada de f para justificar su intervalo inicial (que debe ser de ancho por lo menos 1).

5. Resuelva el ejercicio anterior con una tolerancia de 1×10^{-6} para el instante de tiempo del pico de voltaje usando la iteración de Newton-Raphson. Anote explícitamente las iteraciones. Puede usar código en Python pero provea la sesión de usuario.

6. Usando la función de voltaje de respuesta del circuito CR-RC ante un pulso
$$f(t) = 2(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}), \quad t \geq 0,$$
encuentre, usando el algoritmo de secante, los instantes τ y τ' tales que
$$f(\tau) = 0.25 = f(\tau');$$
es decir, hay que aplicar el algoritmo a la función $g(t) = f(t) - 0.25$. La tolerancia en la aproximación de los instantes es de 1×10^{-3}.

7. Encuentre las soluciones de
$$f(t) = 2(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}) = 0.25$$
planteando una recursión de punto fijo apropiada, con una toleracia de 1×10^{-3}. Grafique la derivada de la función que utilice en cada caso para comprobar que cerca del punto fijo es menor que 1.

8. Aplique la aceleración de Aitken a la sucesión $(\frac{F_n}{F_{n-1}})$ donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, con $1 \leq n \leq 8$. Compare el error de $\frac{F_8}{F_7}$ con el de la última entrada de la tabla, sabiendo que convergen a $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339\ldots$.

9. Programe en Python los algoritmos de sustitución hacia adelante y hacia atrás para sistemas en forma triangular inferior y superior, respectivamente. *Sugerencia:* le serán de utilidad las funciones `np.zeros()` y que con `range(n,-1,-1)` puede realizar un recorrido hacia atrás en un arreglo. Ensaye su programas resolviendo los sistemas que provienen de la descomposición LU de la matriz asociada al sistema
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

10. *a*) Se conocen los siguientes puntos de la órbita de un cuerpo en un sistema planetario (en unidades astronómicas).

x	2.01	1.70	0.50	0.00	-0.5
y	0.01	1.80	2.50	2.30	2.01

Se sabe que la ecuación de la órbita es de la forma
$$x^2 = axy + by^2 + c.$$

Escriba el sistema de ecuaciones de la forma $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{b}$ de modo que se puedan estimar los parámetros a, b y c por mínimos cuadrados resolviendo $A^tA\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^t\mathbf{b}$.

b) Encuentre manualmente la descomposición de Cholesky de la matriz A^tA y verifíquela en Python.

c) Resuelva los sistemas para encontrar los parámetros.

11. En un circuito con admitancias Y_1, Y_2, Y_3, $Y_{s,1}$, $Y_{s,2}$, $Y_{s,3}$ y voltajes V_1, V_2, V_3, $V_{s,1}$, $V_{s,2}$ y $V_{s,3}$ (donde $V_{s,k}$ son conocidos para $1 \le k \le 3$) se sabe que se satisface el sistema

$$\begin{pmatrix} Y_{s,1}+Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1+Y_2+Y_{s,1}+Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3+Y_{s,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{s,1}V_{s,1} \\ Y_{s,2}V_{s,2} \\ Y_{s,3}V_{s,3} \end{pmatrix}.$$

a) Suponga que $Y_{s,1} = 8.51$ S, $Y_{s,2} = 1.57$ S, $Y_{s,3} = 5.30$ S, $Y_1 = 0.89$ S, $Y_2 = 6.87$ S, $Y_3 = 6.24$ S, $V_{s,1} = 8.50$ V, $V_{s,2} = 0.24$ V y $V_{s,3} = 1.98V$. Use la iteración de Jacobi para hallar la solución del sistema con una tolerancia en el residuo (es decir, $\|A\mathbf{x}_k - \mathbf{b}\|$ de 1×10^{-3} a partir de la aproximación inicial $\begin{pmatrix} Y_{s,1}V_{s,1} \\ Y_{s,2}V_{s,2} \\ Y_{s,3}V_{s,3} \end{pmatrix}$. ¿Converge? Explique.

b) Repita el inciso anterior con la iteración de Gauss-Seidel, con la misma tolerancia en el residuo y la misma aproximación inicial. ¿Converge? Explique.

c) Suponga que $V_{s,2}$ cambia a 1.00 V y Y_1 a 0.50 S. ¿Qué iteración utilizaría para recalcular la solución del nuevo circuito? Use la misma tolerancia en el residuo y el resultado que elija de los inciso anteriores como aproximación inicial.

12. Con el sistema LORAN de ubicación se calculaban las distancias con radar a un punto a partir de una red de estaciones. Suponga que un par de estaciones están en $A(20, 0)$ y $B(-20, 0)$, de modo que al diferencia de tiempos entre la respuesta de un barco al comunicarse con ellas satisface

$$5 = \sqrt{(x+20)^2 + y^2} - \sqrt{(x-20)^2 + y^2}; \tag{1}$$

con respecto a la estación $C(5, 50)$ se cumple (en relación a la estación B)

$$6 = \sqrt{(x+20)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-50)^2}. \tag{2}$$

Resuelva (1) y (2) simultáneamente para encontrar una posible ubicación del barco por medio de una iteración de punto fijo, con tolerancia en el error de 1×10^{-2}. Explicite la función cuyo punto fijo se busca y calcule su jacobiano en su aproximación final al mismo.

13. Resuelva el ejercicio anterior con una iteración de Newton-Raphson con la misma tolerancia en el error.

14. Según datos de (Wehrli, 1985) y (Neckel y Labs, 1981) compilados por la Organización Meteorológica Mundial, se tienen las siguientes mediciones de irradiación solar espectral.

Longitud de onda (nm)	398.5	598.5	799	999
Radiancia (W/sm/nm)	1.538	1.760	1.136	0.743

    a) Escriba el polinomio de interpolación en la versión de Lagrange de estos datos.

    b) Grafique los datos y el polinomio en el intervalo $[300, 1000]$.

    c) Use el polinomio para estimar en qué longitud de onda tiene la mayor irradiancia el Sol.

15. Con los mismos datos del ejercicio anterior.

    a) Construya una tabla de diferencias divididas.

    b) Escriba el polinomio de interpolación en la versión de Newton.

    c) Use la tabla para encontrar los polinomios $p_{0,2}$ y $p_{1,3}$ que interpolan primero a todos los puntos menos el último y luego a todos menos el primero, respectivamente. Encuentre sus máximos en el intervalo $[300, 1000]$ y compárelos con el resultado del ejercicio anterior.

16. Encuentre, en los tres subintervalos, la cercha cúbica que pasa por los puntos de los datos de irradiancia del Sol.

17. En el archivo `datos_presion_temperatura.csv` hay datos obtenidos experimentalmente por (Organtini, 2021) de temperatura (° C) contra presión (hPa) del aire.

    a) Encuentre la recta de mínimos cuadrados ($P = mT + b$) que aproxima a los datos.

    b) Grafique los datos junto con la recta.

    c) Obtenga la temperatura a la cual $P = 0$ para hallar una estimación del valor del cero absoluto.

18. Para estimar la fracción S de células cancerosas que sobreviven al ser expuestas a una dosis x de radiación se usa el modelo

$$S(x) = e^{-\alpha x - \beta x^2}.$$

Si se toman logaritmos entonces se obtiene

$$\ln(S(x)) = -\alpha x - \beta x^2 \qquad (\star)$$

Tenemos los datos de (Qing, Yang et al.,2010) para células HeLa-X.

Radiación (Gy)	Fracción de células sobrevivientes
0	1.000
2	0.564
4	0.190
6	0.050
8	0.012
10	0.003

a) Considerando ($\star$) tome logaritmos de los datos adecuados y ajuste un polinomio polinomio cuadrático para estimar α y β.

b) Grafique los puntos junto con el modelo.

c) Estime la cantidad de radiación necesaria para reducir al 25 % las células HeLa-X usando el modelo.

19. En el archivo `datos_ondas.csv` la señal recibida `Onda4` (O_4) se piensa se puede recuperar a partir de las ondas `Onda1` (O_1), `Onda2` (O_2), `Onda3` (O_3), es decir, buscamos λ_1, λ_2, λ_3 tales que

$$O_4 = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2 + \lambda_3 O_3.$$

a) Use mínimos cuadrados para estimar λ_1, λ_2, λ_3.

b) Grafique los residuos.

c) Calcule SS, R^2 y evalúe la pertinencia del modelo.

20. Considere la función

$$f(t) = \cos(\operatorname{sen}(t) + \tfrac{n}{2}t)$$

donde n es su número de lista.

a) Usando las reglas del trapecio, punto medio y Simpson con 5 y 10 puntos equiespaciados en el intervalo $[0, \pi]$, calcule T_5, M_5, S_{10}.

b) Usando las cotas de error determine el número de subdivisiones suficientes para encontrar el valor de $\int_0^\pi f(t)\,dt$ con una tolerancia en el error de 1×10^{-2} para las reglas del trapecio, del punto medio y de Simpson.

c) Usando el valor de la regla de Simpson del inciso anterior como el valor de la integral, calcule el error absoluto de los resultados del primer inciso.

21. Calcule la cuadratura de Gauss-Legendre con 3, 4, 5 y 6 puntos para $v(t) = \sqrt{9.81}\tanh(\sqrt{9.81}t)$ en $[0, 5]$ y el error absoluto de cada una sabiendo que el valor exacto es $14.9673125\ldots$.

22. Estime el valor de $\Gamma(1.5)$, donde Γ es la función Gamma de Euler y que en este caso es

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\,dx,$$

usando una cuadratura de Gauss-Laguerre con $n = 4, 5, \ldots, 10$ puntos. Sabiendo que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$, obtenga el error absoluto de cada aproximación.

23. *a*) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} + x &= \frac{1}{10}\operatorname{sen}(\tfrac{t}{5\pi}) \\ x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 1 \end{aligned}$$

con los métodos de Euler, Euler modificado y de Runge-Kutta de orden 4 en $[0, 2]$, primero con tamaño de paso $h = 1$ y luego $h = \frac{1}{2}$.

b) Obtenga el error absoluto en cada punto contra el resultado de `solve_ivp` de Python.

c) Grafique los resultados en cada caso.