Ejercicios
Materia: Análisis Numérico
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 2021-2022 B
Ingeniería en Física Aplicada
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 8 de junio de 2022

1. Dada la fracción continua de e

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}},$$

   calcule el error de sus convergentes 5, 6, 7 y 8, y decir si son por exceso o por defecto.

2. La fórmula de Stirling para aproximar el factorial es

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

   Para $n = 2, \ldots, 7$ calcule $n!$, la aproximación de Stirling $\tilde{n!}$, el error absoluto, el error relativo y el error porcentual. ¿Qué observa al comparar los errores absoluto y relativo?

3. En el estándar IEEE 754 la precisión simple tiene 23 bits significativos.

   a) Encuentre la representación en binario de $\frac{1}{7}$, considerando la serie geométrica con $\rho = \frac{1}{8}$.

   b) Calcule la suma de la sucesión geométrica correspondiente al número que representa una computadora en precisión simple al almacenar $\frac{1}{7}$.

   c) Calcule el error absoluto del inciso b).

4. Encuentre una cota para el error relativo de un cociente en términos de los errores relativos del dividendo y del divisor.

5. Dada la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$ y el punto $x_0 = 0$:

   a) Encuentre n tal que $|T_n(x) - f(x)| \leq 1 \times 10^{-3}$ si $x \in [0, 1]$, donde T_n es el n-ésimo polinomio de Taylor de f alrededor de x_0.

b) Grafique el residuo y compruebe que el grado de T_n es suficiente.

Sugerencia: considere que $|x| \leq 1$ y que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ y $|\cos(x)| \leq 1$.

6. Para resolver la EDO $-X'' = \lambda X$ con las condiciones de Robin $X' - X = 0$ en $x = 0$ y $X' + X = 0$ en $x = 1$ deben hallarse las raíces de la ecuación

$$(\beta^2 - 1)\tan(\beta) - 2\beta = 0$$

para β.

a) Demuestre que hay una raíz no nula en el intervalo $[0.5, 1.5]$.

b) Por medio de una tabla ilustre la ejecución del algoritmo de bisección para hallar β con una tolerancia de 1×10^{-2}.

c) Use el programa `bisección` para comprobar su resultado y también para reducir la tolerancia en el error 1×10^{-5}.

7. Resuelva la ecuación del ejercicio anterior

$$(\beta^2 - 1)\tan(\beta) - 2\beta = 0$$

a) usando la iteración de punto fijo con una tolerancia de 1×10^{-2} y $x_0 = 1$.

b) Grafique la función con la que itera y su derivada, y compruebe que $|f'(\hat{x})| < 1$.

c) Codifique en Python el algoritmo de punto fijo y úselo para refinar la aproximación a una tolerancia de 1×10^{-5} en el error.

8. Considerando la ecuación del ejercicio anterior

$$(\beta^2 - 1)\tan(\beta) - 2\beta = 0$$

a) use la iteración de Newton-Raphson a mano con la aproximación inicial $x_0 = 1.5$ para hallar una raíz con una tolerancia de 1×10^{-2}. ¿Cuántas iteraciones toma?

b) Use el programa `newtonraphson` en Python para reducir la tolerancia a 1×10^{-6}. ¿Cuántas iteraciones más toma?

9. Use la iteración de la secante para resolver la ecuación del ejercicio anterior

$$(\beta^2 - 1)\tan(\beta) - 2\beta = 0$$

a) Tome como aproximaciones iniciales $x_0 = 1.5$, $x_1 = 1.4$, ejecute a mano e indique el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una tolerancia de 1×10^{-2}.

b) Use el programa `secante` en Python para reducir la tolerancia a 1×10^{-6} e indique el número de iteraciones adicionales necesarias.

10. Aplique la aceleración de Aitken a los convergentes del primer ejercicio. ¿Qué error absoluto se obtiene con el último término de la sucesión acelerada?

11. *a*) Calcule la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

usando el algoritmo manual.

b) Confirme con el código en Python la respuesta del inciso a).

c) Calcule la solución del sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

usando la factorización y sustituciones hacia adelante y hacia atrás.

12. Si un punto (x, y, z) pertenece a un plano entonces satisface una ecuación de la forma $ax + by + cz = 1$ (siempre que no pase por el origen). Se tienen los puntos

$$\begin{aligned} p_1 &= (-8, -7, -8), \\ p_2 &= (-8, -10, -8), \\ p_3 &= (-9, -7, -8), \\ p_4 &= (-7, -7, -5), \end{aligned}$$

y se busca la ecuación del plano que más cerca pasa por los cuatro. Para ello consideramos al sistema

$$\begin{cases} -8a - 7b - 8c = 1, \\ -8a - 10b - 8c = 1, \\ -9a - 7b - 8c = 1, \\ -7a - 7b - 5c = 1. \end{cases}$$

Si A es la matriz de coeficientes, entonces los coeficientes a, b y c son la solución del sistema

$$A^t A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule la factorización de Cholesky de $A^t A$ a mano.

b) Implemente el algoritmo para calcular la factorización de Cholesky en Python y verifique el resultado del inciso anterior.

c) Use la factorización con sustituciones hacia atrás y hacia adelante para calcular $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

13. Realice 3 iteraciones de Jacobi y Gauß-Seidel para los siguientes sistemas. Calcule la distancia entre dos iteraciones consecutivas. Modifique el código en Python para que itere hasta lograr una tolerancia en $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|$ dada y úselo para obtener una tolerancia de 1×10^{-4}. Indique el número de iteraciones para cada esquema, en caso de que converjan. Si convergen, entonces explique por qué.

a)

$$\begin{cases} 0.95x_1 + 0.50x_2 + 0.05x_3 = 1, \\ 0.57x_1 + 0.47x_2 + 0.05x_3 = 1, \\ 0.13x_1 + 0.46x_2 + 0.62x_3 = 1. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3.9x_1 + 0.8x_2 + 0.9x_5 = 0.28, \\ 0.8x_1 - 3.0x_2 + 0.6x_5 = 0.08, \\ 0.6x_2 + 2.0x_3 - 0.8x_5 = 0.83, \\ 0.6x_2 + 0.7x_3 + 2.5x_4 - 1.0x_5 = 0.66, \\ 0.7x_1 + 0.8x_3 + 1.0x_4 + 3.5x_5 = 0.63. \end{cases}$$

14. *a*) Usando una iteración de punto fijo, encuentre una intersección de las curvas

$$\begin{cases} -x^3 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 2, \end{cases}$$

usando como aproximación inicial el punto $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$. Auxíliese del siguiente código en Python para alcanzar una tolerancia de 1×10^{-4} en la norma euclidiana.

```
>>> def f(x,y): return ____, _____
>>> x0 = 0.5
>>> y0 = 1.5
>>> x1, y1 = f(x0,y0)
>>> while((abs(x0-x1)**2+abs(y0-y1)**2)**0.5>1e-4):
>>>  x0 = x1; y0 = y1; x1, y1 = f(x0,y0);
>>> print(abs(x0),abs(y0))
```

b) Calcule el jacobiano, evalúelo en el punto fijo y vea si la norma infinito del mismo es menor a 1.

15. Encuentre una intersección de las curvas

$$\begin{cases} -x^3 + y^2 = 1, \\ \quad x^2 + y^2 = 2, \end{cases}$$

usando la iteración de Newton-Raphson con una tolerancia de 1×10^{-4} en la norma euclidiana y una aproximación inicial $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$. Tenga en cuenta que la función cuyo cero buscamos es

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

16. Sea la función $f(x) = \cosh(x) - x$ y las abcisas $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$.

    a) Escriba el polinomio de interpolación de Lagrange para estos puntos, calculando $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq 4$.

    b) Usando el teorema estime el error del polinomio de interpolación del inciso anterior al estimar $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

    c) Grafique la función, el polinomio y el error absoluto en $[0, 1]$ y compruebe la validez de la cota del inciso anterior.

17. Usando la recursión de Neville y la tabla correspondiente, evalúe el polinomio de interpolación del ejercicio anterior en $x = \frac{2}{3}$. Use la misma tabla para calcular el error de aproximación para $P_{1,2}(x)$, $P_{2,1}(x)$ y $P_{3,1}(x)$, suponiendo que el valor del polinomio de interpolación completo es el valor exacto.

18. Calcule el polinomio de interpolación en la versión de Newton con la tabla de diferencias divididas, con los datos del Ejercicio 16.

19. Calcule los coeficientes de la cercha (cúbica) que pasa por los puntos

$$(-2, -1), (0, 0.5), (2, 1{,}5), (4, 1), (6, 0.9)$$

    y grafique cada una en su sendo intervalo. Es decir, en $[-2, 0]$ se grafica a S_0, en $[0, 2]$ a S_1, en $[2, 4]$ a S_2, etcétera.

20. Se tienen los datos de esperanza de vida (e), alfabetismo en adultos (a), porcentaje de obesidad (o) y gasto per cápita en salud (g) para 19 países.

    a) Use un ajuste de mínimos cuadrados para un modelo de la forma

$$e = c_0 + c_1 a + c_2 o + c_3 g.$$

    Reporte los coeficientes, R^2 y $\hat{\sigma}^2$.

b) Grafique los residuos y evalúe la pertinencia del modelo. ¿Cuál de las variables influye más en la esperanza de vida?

c) Busque la tasa de alfabetismo, de obesidad y gasto per cápita en salud (Banco Mundial) y use el modelo para predecir la esperanza de vida en México. Compare con el valor que da el Inegi.

21. Thommen et al. (2019) midieron experimentalmente la tasa metabólica de unos gusanos planos y obtuvieron datos de su peso. Se ha especulado que la llamada ley de Kleiber conecta la tasa metabólica τ con el peso w según una ley de potencia de la forma

$$\tau = aw^b.$$

Tomando logaritmos, obtenemos

$$\log(\tau) = b\log(w) + a$$

a lo cual podemos ajustar una recta de mínimos cuadrados para averiguar los parámetros b y a.

a) Escriba el sistema lineal que permite calcular a y b de manera explícita usando los datos del archivo proporcionado.

b) Resuelva el sistema y grafique los puntos y el modelo simultáneamente.

22. Shanmugalingam et al. (2019) midieron la concentración en plasma de mujeres no embarazadas con una dosis inicial de 150 mg de Aspirina™, con los siguientes resultados.

Tiempo (h)	Concentración (ng/ml)
0	0
1	2666.67
2	4322.92
4	2625.00

En este periodo de tiempo un modelo cuadrático es una buena aproximación.

a) Calcule los parámetros del modelo con la matriz de Vandermonde.

b) Grafique el modelo con los datos.

c) Use el modelo para estimar el momento de máxima concentración en plasma y cuál es dicha concentración.

23. Sea la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$ en el intervalo $[2, 4]$.

a) Estime el valor de

$$\int_2^4 f(x)\,dx$$

con 8 subdivisiones del mismo tamaño (note que $h = \frac{4-2}{8}$, $x_i = 2 + h \cdot i$) con las reglas del trapecio, punto medio y Simpson.

b) Si se desea obtener el valor de la integral con una tolerancia de 1×10^{-3}, entonces determine un número suficiente de subdivisiones del intervalo para obtenerla con la regla de Simpson. Obtenga el error absoluto de la estimación considerando que el valor exacto es $14.6766401141\ldots$.

24. Usando la cuadratura de Gauß-Legendre de 2, 3 y 4 puntos, estime el valor de la integral

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx.$$

25. Usando la cuadratura de Gauß-Laguerre con 3 y 4 puntos, estime el valor de la integral

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Observe que debe realizar una transformación en la integral para que el intervalo de integración quede $[0, \infty]$.

26. La ecuación de Lane-Emden de índice 1 es

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{t}\dot{\theta} + \theta = 0.$$

Considere la condición inicial $\theta(0.1) = 1$, $\dot{\theta}(0.1) = 0$.

a) Convierta la ecuación a un sistema de orden 1.

b) Resuelva usando el algoritmo de Euler en el intervalo $[0.1, 7]$ con $n = 4$.

c) Lo mismo que el inciso anterior pero con el algoritmo modificado de Euler.

d) Calcule la solución con el código en Python con $n = 50$ y grafique los resultados.

27. Resuelva numéricamente la ecuación de Lane-Emden con las mismas condiciones iniciales, el mismo intervalo y el tamaño de paso del ejercicio anterior

a) primero con el algoritmo de Runge-Kutta de orden 3,

b) luego con el de orden 4 y

c) usando el código en Python con $n = 50$ subdivisiones. Grafique estos dos últimos resultados.