Ejercicios
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Materia: Análisis Numérico
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 20-21 B
Carrera: Ingeniería en Física Aplicada
Última actualización: 20 de mayo de 2021.

1. Los números de Pell P_n están definidos según

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Se sabe que los números

$$\tilde{p}_n = \frac{P_n + P_{n+1}}{P_{n+1}}$$

aproximan a $p = \sqrt{2}$. Calcule $\tilde{p}_n$ para $n = 0, 1, 2, 3$ y, por cada aproximación, determine el error, si es por exceso o por defecto, el error absoluto y el error relativo de las mismas.

2. *a*) Tomando $\rho = \frac{1}{4}$, encuentre el valor de la serie $p = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$ y deduzca la representación de p en binario.
   b) La precisión sencilla del estándar IEEE 754 sólo admite almacenar 23 dígitos binarios (esencialmente). Encuentre el valor de la suma $\tilde{p}$ correspondiente a la aproximación de representar a p en precisión sencilla.
   c) Encuentre el error absoluto de la aproximación $\tilde{p}$ del inciso anterior. Puede dejarla expresado como un número racional.

3. Encuentre una cota para el error relativo de una división en términos del error relativo del dividendo y del divisor.

4. Encuentre el segundo polinomio de Taylor $T_2(x)$ para $f(x) = e^x \cos(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

   a) Use $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$.
   b) Encuentre una cota superior para el error $|f(0{,}5) - T_2(0{,}5)|$ usando el residuo de Taylor y compárelo con el error absoluto
   c) Encuentre una cota para el error $|f(x) - T_2(x)|$ que sea válida en todo el intervalo $[0, 1]$.

5. Use el algoritmo de bisección para encontrar manualmente la aproximación m_3 de la raíz de $x\cos(x) - \ln(x)$ en el intervalo $[7, 8]$. Diga qué tolerancia en el error tiene dicha aproximación. Verifique su respuesta con el programa `biseccion`.

6. Recuerde que si se tiene una función continua en $[x_0, x_1]$ y que cambia de signo en el intervalo, entonces en lugar de tomar el punto medio para aproximar un cero y se cambia un extremo del intervalo original por

$$x_2 = x_0 - f(x_0)\left(\frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}\right)$$

según sea el cambio de signo y se itera, se obtiene el algoritmo de la falsa posición.

   a) Escriba el pseudocódigo correspondiente al algoritmo y prográmelo en Octave/Matlab. Ponga atención en el criterio de paro.
   b) Utilice su programa o realice una prueba de escritorio para encontrar el cero de $f(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{11}{10}$ que se ubica en el intervalo $[1, 1.5]$ con una tolerancia de 1×10^{-1}. ¿Cuántas iteraciones son necesarias?

7. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y la aproximación inicial $x_0 = 1.5$, encuentre las aproximaciones x_1, x_2 y x_3 usando la iteración de Newton-Raphson. Proporcione todos los detalles de los cómputos.

8. Aplique la extrapolación de Aitken

$$a_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}.$$

a la sucesión de cocientes definidos por los números de Pell del Ejercicio 1, y calcule el error absoluto y relativo de la nueva sucesión obtenido. ¿Cuántas veces mejor es que la última aproximación que obtuvo en el Ejercicio 1?

9. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y úsela para resolver el sistema

$$Ax = b$$

donde

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Escriba detalladamente sus cómputos.

10. Encuentre la descomposición de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Escriba detalladamente sus cómputos.

11. Recuerde que la iteración de Richardson se obtiene en el esquema iterativo general definiendo $Q = I$. Demuestre que si se divide a la i-ésima ecuación en el sistema $Ax = b$ entre $a_{i,i}$ y luego se utiliza la iteración de Richardson con el sistema resultante, entonces el resultado es el mismo que si se recurre a la iteración de Jacobi desde el principio.

12. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0.87 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0.29 & 0.82 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0 & 0.94 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.17 & 0 & 0.22 & 0 \\ 0.48 & 0 & 0.01 & 0 & 0.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.26 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.65 \end{pmatrix}.$$

   a) Ejecute tres iteraciones de los métodos de Jacobi y de Gauß-Seidel usando el vector derecho de la ecuación como vector inicial. Escriba explícitamente los despejes utilizados en cada caso.
   b) Explique por qué convergen los métodos. Si no convergen, entonces también explique por qué.

13. *a*) Escriba el polinomio en la versión de Lagrange que interpola a los datos $(0.32, 3.1)$, $(1, 2)$, $(1.5, -0.83)$, $(2.11, -1)$.
   b) Suponiendo que los puntos provienen de la evaluación de una función diferenciable f, use el polinomio de interpolación para calcular $f(0.5)$.

14. Sean $x_0 = 1$, $x_1 = 1.4$ y $x_2 = 1.6$.

   a) Construya el polinomio de interpolación de a lo más grado 2 usando los puntos $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq 2$ para la función $f(x) = e^{2x-4}$.
   b) Encuentre una cota para el error en la interpolación en el intervalo $[x_0, x_2]$.
   c) Use la interpolación para aproximar $f(1.25)$ y compare el error con la cota obtenida en el inciso anterior.

15. Construya la tabla del algoritmo de Neville para calcular el valor del polinomio de interpolación en $x = 1.5$ con los datos del ejercicio 14.

16. Construya la tabla de diferencias para obtener la versión de Newton del polinomio de interpolación para los datos $(x_i, f(x_i))$ del ejercicio 14.

17. *a*) Escriba las ecuaciones que se necesitarían para encontrar la cercha cúbica libre que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 3)$ y $(3, 2)$, pero no las resuelva.
   b) Use los comandos `spline` y `plot` en Octave/Matlab para graficar la cercha cúbica libre del inciso anterior y determine el valor de la cercha en $x = 1.5$.

18. Utilice una iteración de punto fijo para encontrar una solución del siguiente sistema

$$x^2 - xy + y^2 = 1,$$
$$2y^2 - \frac{x^2}{4} = 1,$$

con una tolerancia de 1×10^{-2}. Calcule la norma del jacobiano de la función que utilice en la aproximación y compruebe que se justifica la convergencia.

19. Resuelva el sistema del ejercicio anterior usando la iteración de Newton-Raphson.

20. En (Drotning, 1979) se obtuvieron los siguientes datos de expansión térmica para cierto tipo de vidrio.

Temperatura (° C)	Incremento de longitud (%)
22.41	0.00
229.31	15.89
293.10	20.96
350.00	26.03
398.26	29.18

Escriba el sistema para encontrar la recta de mínimos cuadrados, resuélvalo, grafíque la recta junto con los puntos e indique el resultado del coeficiente de expansión térmica lineal del vidrio estudiado.

21. En (Drotning, 1979) se obtuvieron los siguientes datos de densidad contra temperatura para el vidrio cuando es sólido.

Temperatura (° C)	Densidad (g/cm^2)
22.1	13.70
227.1	13.67
288.1	13.65
345.8	13.64
388.1	13.63
437.3	13.60
484.7	13.59

Escriba la matriz de Vandermonde para plantear el sistema para encontrar el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados, resuélvalo, grafíque el polinomio junto con los puntos y úselo para predecir la densidad del vidrio a los 100° C.

22. Ingrese a la página

`https://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/mlr/frames/frame.html`

y descargue el conjunto de datos para “Hollywood movies”. Con la notación que ahí se usa, encuentre un modelo lineal

$$X_1 = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_4$$

para la recaudación en el primer año de una película en términos los costos de producción, de promoción y de las ventas del libro en el que se basan, usando el comando `ols`. Grafique los residuos y reporte la varianza estimada de los residuos. ¿Qué puede decir sobre la pertinencia del modelo en términos de lo anterior?

23. Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$ en el intervalo $[-1, 3]$, estime el valor de la integral

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$$

usando 10 subdivisiones igualmente espaciadas con la regla del trapecio y del punto medio. Estime el error que tiene cada una.

24. Encuentre el número de subdivisiones igualmente espaciadas que deben usarse para estimar la integral del ejercicio anterior con una tolerancia de 1×10^{-3} usando la regla de Simpson, y calcule dicha estimación.

25. Use la cuadratura de Gauß-Legendre con tres puntos para estimar la integral del ejercicio 23.

26. Use la cuadratura de Gauß-Laguerre de cuatro puntos para estimar la integral impropia

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$$

Escriba explícitamente los puntos y los pesos utilizados.

27. Considere el siguiente ejemplar de la ecuación de Duffing

$$x'' + 0.3x' - x + x^3 = 0.3\cos(1.2t)$$

con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$.

a) Escriba la ecuación como un sistema de primer orden.
b) Resuelva numéricamente la ecuación usando el comando `lsode` en el intervalo de 0 al número de mes de su nacimiento, subdividiendo al intervalo en el número adecuado de partes. Grafique la solución y sus primera y segunda derivadas.

28. Son muy conocidas las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar la ecología de dos poblaciones, normalmente una de depredadores y otra de presas. En tal caso son de la forma

$$\begin{aligned} x' &= (a_1 - b_1 y)x, \\ y' &= (-a_2 + b_2 x)y \end{aligned}$$

donde x es la población de presas y y la de depredadores. Para una población de liebres y linces medida por la Hudson Bay Company entre 1900-1920 se puede calcular que $a_1 = 0.4732$, $b_1 = 0.0240$, $a_2 = 0.7646$ y $b_2 = 0.0234$, con poblaciones iniciales $x(0) = 30$ y $y(0) = 4$.

Compute manualmente con los algoritmos de Euler y de Euler modificado para estimar las poblaciones de liebres y linces durante los primeros cinco años (con tamaño de paso $h = 1$).

29. Resuelva numéricamente el sistema del ejercicio anterior pero ahora con el algoritmo de Runge-Kutta de orden cuatro. ¿Qué observa en relación a la población de liebres en el intervalo de tiempo estudiado?