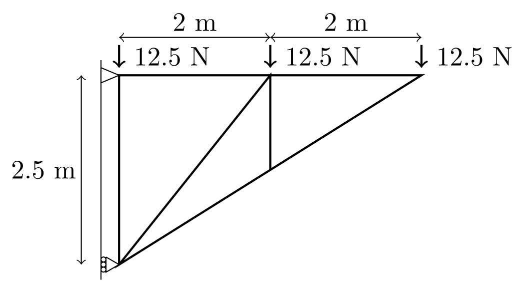
Ejercicios
Materia: Álgebra Lineal
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 2022-2023 B
Ingeniería Civil
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 13 de junio de 2023

1. Dada la siguiente armadura



   plantee el sistema de ecuaciones lineales para encontrar las tensiones de las barras y las reacciones.

2. Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas.

   a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 \qquad\quad + \; x_3 = 8. \end{cases}$$

   b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

   c)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 = 2. \end{cases}$$

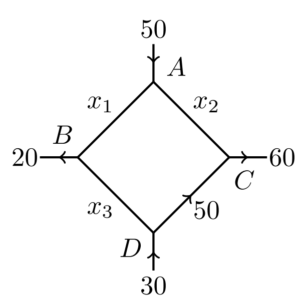
3. Usando las operaciones elementales con ecuaciones, reduzca el siguiente sistema a uno triangular equivalente y calcule su solución con una marcha hacia atrás.
$$\begin{cases} 2x_1 + \; x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - \; x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Resuelva el siguiente sistema usando la reducción escalonada por filas. No es necesario que escriba todos los detalles de la prueba de escritorio, solamente son indispensables los relativos a las operaciones elementales por filas. Separe el cómputo según las iteraciones, de preferencia.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 13, \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -16. \end{cases}$$

5. Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
calcule
   a) $A + B$.
   b) $\frac{1}{2}A - 3B$.
   c) AB^t.
   d) $(A - B)^t$. Compruebe que da lo mismo que $A^t - B^t$.
   e) Tomando $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $C(AB^t)$ y $(CA)B^t$ y verifique que son iguales.

6. *a*) Encuentre las inversas de las matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   b) Use las inversas del inciso anterior para resolver los sistemas
$$A_1\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7. Considere el flujo vehicular en un esquema de calles como el que sigue. Las calles que no tienen indicación de dirección puede considerarlas en una dirección arbitraria.



a) Escriba el sistema lineal para hallar los flujos x_1, x_2 y x_3.

b) Reduzca escalonadamente por filas y resuelva. ¿Tiene una solución, infinitas o ninguna? Explique.

8. Balancee la reacción

$$\mathrm{KOH} + \mathrm{H_3PO_4} \rightleftharpoons \mathrm{K_3PO_4} + \mathrm{H_2O}$$

usando un sistema de ecuaciones lineales y una reducción escalonada por filas.

9. Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ n & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde n es su número de lista. Hágalo primero expandiendo según la segunda fila y luego según la tercera columna. Proporcione todos los detalles del cómputo.

10. Usando operaciones elementales por filas para llevar a la forma escalonada por filas, calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 4 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -5 & 1 & n \end{pmatrix},$$

donde n es su número de lista.

11. Usando la fórmula con la adjunta clásica, calcule las inversas de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7+n \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} n & 1 & 3 \\ -4 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

El valor de n es su número de lista.

12. Usando la regla de Cramer resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & n & -1 \\ -3 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aquí n es su número de lista.

13. Demostrar que $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y la multiplicación por escalar definidas para matrices.

14. Usando el teorema de caracterización de subespacios de un espacio vectorial, determine si los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios vectoriales correspondientes.

    a) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 = 0 \right\}$.

    b) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} : a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}$.

    c) $V = P_2$, $S = \{p \in P_2 : p(1) = 1\}$.

15. Determine si el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & n \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

    es linealmente dependiente o independiente, donde n es su número de lista.

16. Determine si el vector $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los elementos en S. Si lo es, entonces encuentre una combinación lineal.

    a) $\mathbf{v} = x^3 - nx + 3$, $S = \{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$.

    b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ 0 & -n \end{pmatrix} \right\}$.

    c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 3 \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$.

    El valor de n es su número de lista.

17. Demuestre que los siguientes conjuntos S son bases de los espacios vectoriales V correspondientes.

    a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} n \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^4$. Aquí n es su número de lista.

    b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, V es el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la suma de los elementos de la diagonal es 0.

18. Encuentre la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ correspondiente a las soluciones del sistema

$$\begin{cases} nx_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ nx_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases},$$

donde n es su número de lista. *Sugerencia:* recuerde que debe reducir escalonadamente por filas a la matriz asociada al sistema, y después escribir a las variables que queden como pivotes en términos de las que queden libres. Luego, en las soluciones vistas como vectores de $\mathbb{R}^4$ factorice a las variables libres como escalares como lo hicimos en clase, y de ahí serán evidentes los vectores que conforman la base.

19. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

donde n es su número de lista.

a) Encuentre la representación del vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}_1$.

b) Calcule la matriz de cambio de base $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$.

c) Calcule la matriz de cambio de base $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ encontrando la inversa de la matriz del inciso anterior.

d) Encuentre la representación del vector $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}_1$ usando la matriz obtenida en el inciso anterior.

20. Verifique que la transformación

$$\begin{aligned} f : P_2 &\to \mathbb{R}^2, \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 &\mapsto \begin{pmatrix} n a_0 - a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es lineal. Aquí n es su número de lista.

21. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ -n x_1 + 2x_2 - 10x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Encuentre bases para su núcleo y su imagen y con ello encuentre $n(T)$ y $r(T)$.

b) ¿Es T inyectiva? ¿Es suprayectiva? Explique.

Aquí n es su número de lista.

22. Considere las transformaciones lineales

$$\begin{aligned}
&S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\\
&\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1-2x_2+3x_3\\5x_1+nx_2+2x_3\end{pmatrix},\\
&T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\\
&\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x_1+nx_2+x_3+9x_4\\2x_1+x_3+7x_4\\4x_1+2x_2+x_3+2x_4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calcule $[S]$, $[T]$ y $[S\circ T]$ y compruebe que $[S\circ T]=[S][T]$. Aquí n es su número de lista.

23. Sea la base

$$\mathcal{B}=\left\{\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}n\\0\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

del subespacio W de $\mathbb{R}^4$.

a) Encuentre el complemento ortogonal $W^\perp$ del subespacio W. Esto significa que debe encontrar una base del mismo.

b) Encuentre la proyección del vector $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\n\\3\\-2\end{pmatrix}$ en los espacios W y $W^\perp$ y compruebe que suman al vector $\mathbf{v}$.

24. Dada la base

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}n\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

aplique el algoritmo de Gram-Schmidt para encontrar, a partir de ella, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

25. Encuentre la solución de mínimos cuadrados de los siguientes sistemas. Determine el residuo y su norma.

a)

$$\begin{cases}-9x_1+3x_2=-3,\\5nx_1+2x_2=-2,\\2x_1-x_2=-1.\end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - 2nx_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 \qquad\quad = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - \ \ 3x_3 = -3, \\ -2x_1 \qquad\ \ - \ \ \ x_3 = -1. \end{cases}$$

26. Se tienen los siguientes datos (Walski, 1986) de costo unitario de instalación de tuberías de PVC según su diámetro.

Diámetro (mm)	Costo ($/m)
150	171
200	244
250	302
300	387
350	491

a) Estime la tasa de costo sobre metro por milímetro de diámetro de instalación de tuberías usando mínimos cuadrados para hallar una recta de ajuste.

b) Grafique los datos junto con la recta.

[Los alumnos del 1 al 5 le quitan el primer dato, los del 6 al 10 sólo el segundo; los del 11 al 15 sólo el tercero; los del 16 al 20 sólo el cuarto y del 21 en adelante sólo el quinto.]

27. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) encuentre su polinomio característico y sus raíces, y con ello la multiplicidad algebraica de sus autovalores y

b) calcule los autovectores asociados a cada autovalor, y encuentre su multiplicidad geométrica.

28. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

determine si es posible diagonalizarla y calcule la matriz S tal que $S^{-1}AS$ es diagonal. Verifique esto último con un cómputo explícito.

29. Determine si las siguientes matrices son normales. Si lo son, entonces encuentre una matriz unitaria U tal que U^*AU es diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$b)\ A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

$c)\ A = \begin{pmatrix} n+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix}.$