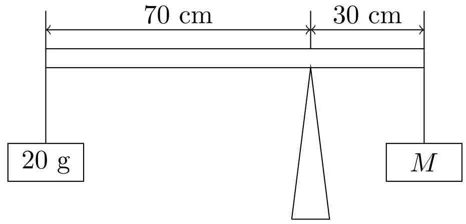
Ejercicios
Materia: Álgebra Lineal
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 2021-2022 B
Ingeniería Civil
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 10 de junio de 2022

1. Una regla de un metro de 30 g de masa tiene colgado en un extremo 20 g de una masa. Esta apoyada como se ve en la figura. Plantee un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la masa M colocada en el otro extremo para equilibrar el sistema.



2. Determine si los siguientes sistemas tienen conjunto solución vacío, con un elemento o con infinitos elementos. En estos dos últimos casos, escríbalos de manera explícita.

   a)
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 = -12. \end{cases}$$

   b)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 7x_1 + 11x_2 = 13. \end{cases}$$

   c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 = 2. \end{cases}$$

3. Usando las operaciones (elementales) de ecuaciones, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, de modo que, al final, realice una sustitución hacia atrás.
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Aplique la reducción escalonada por filas a la matriz aumentada de los siguientes sistemas para obtener su conjunto solución.

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 - 6x_2 = -3. \end{cases}$$

5. Usando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   compruebe que $(A+B)C = AC + BC$. Demuestre esta última identidad en general.

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 5 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   compruebe que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$. Demuestre esto último en general usando la asociatividad y hecho de que $(AB)^T = B^T A^T$.

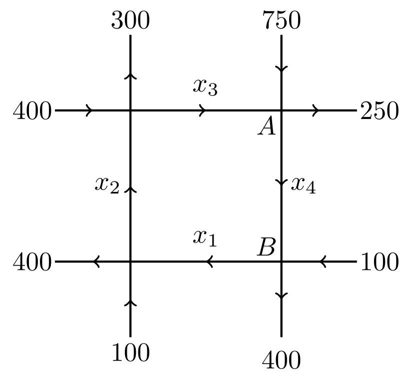
7. Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = b_2, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 = b_3, \\ -2x_1 - 4x_3 + 5x_4 = b_4. \end{cases}$$

   a) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes.

   b) Suponiendo que $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule la solución del sistema usando la matriz inversa. Repita con $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. El siguiente diagrama muestra una red de calles de un solo sentido con el tránsito en las direcciones indicadas. Se indica también el flujo promedio en cada una en automóviles por hora.



a) Escriba un sistema lineal de ecuaciones que permita averiguar los flujos desconocidos.

b) Resuelva el sistema.

c) Si el flujo entre los puntos A y B se debe reducir por mantenimiento de la calle, ¿cuál sería su mínimo valor posible para mantener el flujo del resto?

9. Dada la ecuación sin balancear (que corresponde a la combustión del propano)

$$C_3H_8 + O_2 \rightleftharpoons CO_2 + H_2O,$$

a) escriba un sistema para balancear la ecuación.

b) Resuélvalo y encuentre una solución entera.

10. Calcule el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

expandiendo primero por la primera fila, y después por la segunda columna. Proporcione todos los detalles.

11. Calcule el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

usando las propiedades de los determinantes.

12. Calcule la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

usando la fórmula con la adjunta clásica.

13. Usando la regla de Cramer encuentre las soluciones a los siguientes sistemas.

a)

$$\begin{cases} -x_1 + 9x_2 = -10, \\ -4x_1 - 10x_2 = -9. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 10, \\ 6x_1 + 8x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 - 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -5, \\ 5x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -6. \end{cases}$$

14. Demuestre que el conjunto de polinomios de grado a lo más n

$$\{a_0 + a_1x + \cdots + x^n : a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\}$$

es un espacio vectorial con la suma

$$(a_0+a_1x+\cdots a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

y la multiplicación por escalar

$$\lambda(a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n.$$

15. Dado el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto de vectores

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

determine si los vectores

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pertenecen a $\langle S \rangle$ o no. Si un vector sí pertenece, entonces expréselo como combinación lineal de elementos en S.

16. Considere el espacio V de las matrices de dimensión 2×2. Demuestre que el conjunto de matrices triangulares superiores

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} : a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de V.

17. Determine si el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente, dentro del espacio vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (con la suma y multiplicación por escalar usuales de matrices).

18. Determine si el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $\mathbb{R}^3$.

19. Encuentre la dimensión del subespacio

$$W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

del espacio de los polinomios de grado a lo más 2.

20. Calcule el rango y la nulidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 11 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

21. *a*) Encuentre las matrices de cambio de base entre

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Use las matrices para calcular la representación en B_2 de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y en B_1 de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

22. *a*) Aplique el algoritmo de Gram-Schmidt a la siguiente base en $\mathbb{R}^4$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Represente al vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en la base ortogonal obtenida en el inciso anterior.

23. Dada la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y el vector $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, encuentre la proyección ortogonal de v en el subespacio W generado por los primeros dos vectores de B y su descomposición como $w_1 + w_2$ con $w_1 \in W$ y $w_2 \in W^{\perp}$. Compruebe que w_2 es ortogonal a w_1.

24. *a*) Encuentre la solución de mínimos cuadrados de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Encuentre la recta de mínimos cuadrados que se ajusta a los puntos $(0,1)$, $(2,\frac{1}{2})$, $(3,\frac{6}{5})$, $(\frac{7}{2},2)$. Grafique a la recta y a los puntos en un mismo plano.

25. Verifique que la transformación

$$f : V \to \mathbb{R}^2,$$
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 - 2a_1 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix},$$

es lineal, donde V es el espacio de los polinomios de grado a lo más 2.

26. Encuentre la representación matricial de la transformación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ x - y \\ x + 3y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

27. Determine la dimensión del núcleo y del rango de la transformación lineal

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}.$$

Encuentre bases para el núcleo y el rango, respectivamente.

28. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 209 & 208 & 184 \\ -32 & -33 & -28 \\ -196 & -192 & -173 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre el polinomio característico $p_A(x)$.

b) Calcule los autovalores de A.

c) Determine los autoespacios $\mathcal{E}_A(\lambda)$ de A encontrando las bases de cada uno. Auxíliese de reducciones escalonadas por filas apropiadas.

29. Determine si las siguientes matrices son diagonalizables. Si lo son, entonces encuentre la matriz S tal que $S^{-1}AS$ es diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 18 & -15 & 33 & -15 \\ -4 & 8 & -6 & 6 \\ -9 & 9 & -16 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

30. Determine si las siguientes matrices son normales. Si una lo es y todos sus autovalores son reales, entonces encuentre la matriz U que diagonaliza a dicha matriz.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.