Ejercicios
Materia: Análisis de Fourier y Armónico
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre 2022-2023 A
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Última actualización: 18 de enero de 2023

1. Demuestre que si f es periódica y diferenciable, entonces f' es periódica.

2. Verifique que $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{2\pi i k x}$ es periódica para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

3. Demuestre que existe una función $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que $f \cdot f = 0$ pero $f \not\equiv 0$.

4. Demuestre que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente entonces la función límite es continua.

5. Demuestre que las funciones $\operatorname{sen}(2k\pi x)$ y $\cos(2k\pi x)$ conforman un conjunto ortogonal. Es decir,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2k\pi x) \cdot \cos(2\ell\pi x) &= 0, \\
\operatorname{sen}(2k\pi x) \cdot \operatorname{sen}(2\ell\pi x) &= \tfrac{1}{2}[k = \ell \neq 0], \\
\cos(2k\pi x) \cdot \cos(2\ell\pi x) &= \tfrac{1}{2}[k = \ell \neq 0] + [k = \ell = 0].
\end{aligned}$$

6. Suponga que $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable. Demuestre que si $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ entonces la función

$$F(k) = \int_a^b f(x) \cos(kx)\, dx$$

es tal que

$$\lim_{|k|\to\infty} F(k) = 0.$$

7. Demuestre que si $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_x^{x+1} f(t)\, dt.$$

8. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

converge y calcule su suma. *Sugerencia:* hay que mirar la demostración del problema de Basilea generalizado.

9. Sea $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ el espacio vectorial complejo de las funciones periódicas infinitamente diferenciables y $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Demuestre que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un $d_n > 0$ tal que para toda $k \neq 0$

$$|c_k(f)| \leq \frac{d_N}{|k|^N}.$$

Sugerencia: demuestre que si g es una función periódica integrable según Riemann entonces existe un M (que depende de g) tal que $|c_k(g)| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{Z}$; luego, integrando por partes, encuentre una relación entre $c_k(f)$ y $c_k(\frac{d^N}{dx^N} f)$.

10. Calcule las series de Fourier de las siguientes funciones (se sobreentiende que extendidas periódicamente). Grafique S_1, S_2, S_3 y S_4 para cada una.

    a) $\mathbf{1}_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}$.
    b) $f(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2$.
    c) $f(x) = x$.

11. Derive término a término las series de Fourier de los incisos 2 y 3 del ejercicio anterior y verifique si convergen; explique en caso de que no. Integre término a término la serie de Fourier obtenida para la función del segundo inciso del ejercicio anterior y vea si converge la serie resultante a una antiderivada de la función.

12. Demuestre la *identidad de polarización*: si H es un espacio prehilbertiano entonces para $x, y \in H$ se satisface

$$4x \cdot y = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

13. Verifique que $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (donde $\psi_j = \sum_{n\in\mathbb{N}}[j = n]n$) es un sistema ortonormal en $\ell^2(\mathbb{N})$ y proporcione los detalles del hecho de que es completo, comprobando que para cualquier $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n n \in \ell^2(\mathbb{N})$ existe un $v_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j$ tal que $\|v - v_m\|$ se puede hacer tan pequeño como se desee.

14. Considere al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ pero restringidos a $[0, 1]$.

    a) Encuentre todos los valores posibles de a y b tales que $p_1(x) = 1$ y $p_2 = a + bx$ sean ortogonales con el producto interior $f \cdot g = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$.
    b) Encuentre todos los valores posibles de a, b y c tales que $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - 2x$ y $p_3(x) = a + bx + cx^2$ sean ortogonales entre sí.
    c) Aplique el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt al sistema completo $\{1, x, x^2, x^3\}$ del espacio de Hilbert de los polinomios de grado a lo más 3.

15. Demuestre que si $T : V \to W$, con V y W espacios prehilbertianos, y $\|T(v)\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$, entonces T es una isometría. Use esto para obtener otra demostración de que la T del teorema sobre la representación de vectores en espacios prehilbertianos a través de bases ortonormales es una isometría.

16. Sea H un espacio de Hilbert y $(a_j)_{j\in J} \subseteq H$. Demuestre que $(a_j)_{j\in J}$ es un sistema completo si, y sólo si, su espacio ortogonal

$$(a_j)^\perp = \{h \in H : h \cdot a_j = 0 \text{ para todo } j \in J\}$$

es el espacio nulo. *Sugerencia:* es de utilidad demostrar primero que si $M \subseteq H$ es un subespacio de H, entonces $M^\perp$ es cerrado; también se puede usar que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ y que si M es cerrado entonces $M \oplus M^\perp = H$.

17. Demuestre que $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no es completo construyendo una sucesión de Cauchy de funciones continuas periódicas cuyo límite no sea una función continua. *Sugerencia:* considere a las funciones f_n tales que $f_n|_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}]} \equiv 0$ y $f_n|_{[\frac{1}{2},1)} \equiv 1$ y f_n es lineal en el resto de $[0,1)$, extendidas de manera periódica.

18. Dado un espacio prehilbertiano H, sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy dentro del mismo.

    a) Dadas dos sucesiones de Cauchy (x_k) y (y_k) pertenecientes a $\mathcal{H}$, definimos la relación

    $$(x_k) \sim (y_k) \leftrightarrow \|x_k - y_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

    Demuestre que $\sim$ es de equivalencia.

    b) Al conjunto cociente $\hat{H} = \mathcal{H}/\sim$ dótelo con una suma y producto por escalar definidos por

    $$[x_k] + [y_k] = [(x_k + y_k)], \quad \lambda[x_k] = [\lambda x_k].$$

    Esto convierte a $\hat{H}$ en un espacio vectorial donde definimos el producto interno

    $$[x_k] \cdot [y_k] = \lim_{k\to\infty} x_k \cdot_H y_k.$$

    Demuestre que este producto interno está bien definido, con lo que $\hat{H}$ se convierte en un espacio prehilbertiano.

    c) Embeba a H en $\hat{H}$ según sucesiones constantes; es decir, para $x \in H$ defina $x_k = x$ para $k \in \mathbb{N}$ y tome $\phi : H \to \hat{H} : x \mapsto [x_k]$. Demuestre que $\phi(H)$ es denso en $\hat{H}$ según la norma inducida por el producto interno del inciso anterior.

    d) Demuestre que $\hat{H}$ es de Hilbert; es decir, que es completo.

19. Verifique que $\|?\|_1$ definida según

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

es una norma en $L^1_{\mathrm{bc}}(\mathbb{R})$.

20. Calcule $f * (f * f)$, donde $f(x) = [-1 \leq x \leq 1]$.

21. *a*) Demuestre que la transformación de Fourier es lineal.

    b) Si $f \in L^1_{\mathrm{bc}}(\mathbb{R})$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces demuestre que $|\hat{f}(y)| \leq \hat{f}(0)$ para cada $y \neq 0$.

22. *a*) Calcule la transformada de Fourier de la función $f(x) = x[|x| < 1]$.

    b) Supóngase que $\hat{f}(y) = e^{-y^4}$. Encuentre las transformadas de Fourier de $f(x/2)$, $f(x/2-1)$ y $f(x/2-1)e^{-ix}$.

23. Demuestre que $e^{-\pi x^2}$ pertenece a la clase de Schwartz.

24. Usando el teorema de Plancherel calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{\pi y}\right)^4 dy.$$

25. Use las fórmulas de los coeficientes de Fourier para la cuerda vibrante para resolver la ecuación de onda con las siguientes condiciones iniciales.

    a) $f(x) = x[0 \leq x \leq \frac{1}{2}] + (1-x)[\frac{1}{2} \leq x \leq 1]$, $g(x) = 0$.

    b) $f(x) = 0$, $g(x) = [\frac{1}{2} - \epsilon \leq x \leq \frac{1}{2} + \epsilon]$, $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$.

    Anime los resultados con Desmos.

26. Encuentre la solución al problema de Dirichlet en un círculo unitario expandiendo por serie de Fourier cuando la condición de frontera es

    a) $f(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$ (extendida periódicamente),

    b) $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

27. Escriba la solución de la ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condición inicial $u(x,0) = [|x| < 1](x+1)$ y trate de expresarla en términos de la función erf.

28. Sea $f \in \mathcal{S}$ y $u(x,y) = (f * \mathcal{P}_y)(x)$.

    a) Demuestre que la función u es dos veces diferenciable y satisface la ecuación de Laplace.

    b) Demuestre que $\|u - f\|_2^2$ tiende a 0 conforme y tiende a 0.

29. Para una solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ que satisface las condiciones iniciales $u(x,0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ y de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \geq 0$, defina la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx.$$

Imite la demostración para la ecuación de calor con condición inicial nula para demostrar que $u \equiv 0$.

30. *a*) Demostrar que

    1) $\widehat{f(\mathbf{x}+\mathbf{h})} = \hat{f}(\boldsymbol{\xi})e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$,
    2) $\widehat{f(\mathbf{x})e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\mathbf{h}}} = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{h})$,
    3) $\widehat{f(\lambda\mathbf{x})} = \lambda^{-d}\hat{f}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi})$ si $\lambda > 0$,
    4) $\widehat{f(R\mathbf{x})} = \hat{f}(R\boldsymbol{\xi})$ para cualquier rotación R,

    donde $\hat{?}$ es la transformación de Fourier en $\mathbb{R}^d$.

    b) Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto e^{-\pi\|\mathbf{x}\|^2}$, calcule las transformadas de Fourier de $f(\mathbf{x}+(1,0))$, $f(\frac{\mathbf{x}+(1,0)}{4})$ y $f(\frac{\mathbf{x}+(1,0)}{4})e^{-2\pi i(x_1,x_2)\cdot(1,1)}$.

31. Suponga que u es una solución de la ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tal que $u(x,0) = f(x) \in \mathcal{S}$. Demuestre que $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ para $t > 0$. *Sugerencia:* observe que para algún M ocurre que $|f(x)| < M$ para todo x y que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$; descomponga el intervalo de integración de la convolución que define a la solución en dos partes, como es usual.

32. Sea $f \in \mathcal{S}$.

    a) Integrando por partes, demuestre que

    $$\|f\|_2^2 = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{\tfrac{df(x)}{dx}}\, dx$$

    y concluya que

    $$\|f\|_2^2 \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)\overline{\tfrac{df(x)}{dx}}|\, dx.$$

    b) Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y los teoremas de los siete incisos y de Plancherel, demuestre que

    $$\|f\|_2^2 \leq 4\pi\|xf(x)\|_2\|\xi\hat{f}(\xi)\|_2.$$

33. Usando las identidades $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, la fórmula para la solución de la ecuación de onda en $\mathbb{R}^d$ (con $d = 1$), deduzca de nuevo la fórmula de D'Alembert $u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$. *Sugerencia:* Observe que de las identidades para la diferenciación y la transformación de Fourier se pueden obtener otras para la antiderivación.