Ejercicios
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Materia: Análisis de Fourier y Armónico
Profesor: Octavio Alberto Agustín Aquino
Semestre: 20-21A
Carrera: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Última actualización: 17 de enero de 2021.

1. Demuestre que si f es periódica con periodo 2π e integrable, entonces

$$\int_a^{a+2\pi} f(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Demuestre, por medio de un contraejemplo, que la operación binaria

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

no es definida positiva en $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, donde $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es el espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos de todas las funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son integrables según Riemann en el intervalo $[0, 1]$.

3. Verifique los siguientes cómputos que muestran que las ondas simples $\operatorname{sen}(kx)$ y $\cos(kx)$ constituyen un conjunto ortogonal respecto al producto interior $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\cos(\ell x)\,dx &= 0,\\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(\ell x) &= \frac{1}{2}[k = \ell \neq 0],\\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x) &= \frac{1}{2}[k = \ell \neq 0] + [k = \ell = 0].
\end{aligned}$$

4. Demuestre con un ejemplo que la sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables en $[0, 1]$ puede converger en la norma L^2 pero que no puntualmente. *Sugerencia:* considere $[|\frac{1}{2} - x| \leq \delta_n]$ para un δ_n apropiado.

5. Demuestre con un ejemplo que una sucesión de funciones integrables en $[0, 1]$ puede converger puntualmente pero no en la norma L^2. *Sugerencia:* trate de construir funciones que no se anulen en un intervalo cada vez más pequeño, de modo que su valor dentro del mismo se haga cada vez más grande y así el valor de su integral no decrezca.

6. Calcule las series de Fourier de las siguientes funciones periodicas según se describen en el intervalo $[0, 1]$; esto es, encuentre la expresión general de los coeficientes. Escriba de manera explícita $S_5(f)$ para cada una.

a) $f(x) = 2x[0 \leq x < 1/2] + (1 - 2x)[1/2 \leq x \leq 1]$.
b) $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)$.
c) $f(x) = x$.

7. Sea $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ el espacio vectorial complejo de las funciones periódicas infinitamente diferenciables y $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Demuestre que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un $d_N > 0$ tal que para todo $k \neq 0$

$$|c_k(f)| \leq \frac{d_N}{|k|^N}.$$

Sugerencia: demuestre que si g es una función integrable entonces existe un M que depende de g tal que $|c_k(g)| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{Z}$; después, integrando por partes, encuentre la relación entre los coeficientes de Fourier de f y de $f^{(N)}$.

8. Demuestre la identidad de polarización: si H es un espacio prehilbertiano, entonces para cada $x, y \in H$ se satisface

$$4x \cdot y = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

9. Demuestre que si (u_n) y (v_n) son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión $(u_n + v_n)$ es de Cauchy. También demuestre que, si las sucesiones convergen a sendos límites u y v, entonces la sucesión suma converge a $u + v$.

10. Demuestre que si H y H' son espacios de Hilbert y $T : H \to H'$ es una transformación lineal tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in H$, entonces T es una isometría; esto es $x, y \in H$

$$T(x) \cdot T(y) = x \cdot y.$$

Sugerencia: ¿hay alguna identidad que relacione al producto interno con la norma?

11. Demuestre que el espacio prehilbertiano $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no es completo con el producto interno $f \cdot g = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$. *Sugerencia:* a partir de una función escalón construya una sucesión de funciones continuas que converja a la función escalón, y de modo que sea una sucesión de Cauchy con la norma inducida por el producto interno.

12. Sea $(V, \cdot)$ un espacio prehilbertiano. Demuestre que el producto interno ?·?? es continuo. Es decir, que si las sucesiones $(v_n), (w_n) \subset V$ convergen a v y w respectivamente, entonces $v_n \cdot w_n$ converge a $v \cdot w$.

13. Sea F un espacio prehilbertiano y sea E un subespacio denso de F. Demuestre que las completaciones de E y F coinciden.

14. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones.

a) $f(x) = [a \leq x \leq b]$.
b) $f(x) = e^{-x}[0 \leq x \leq 1]$.

15. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciable tal que satisface la EDO
$$g'(x) = -2\pi x g(x).$$
Demuestre que existe una constante c tal que $g(x) = ce^{-\pi x^2}$. *Sugerencia:* defina $u(x) = g(x)e^{\pi x^2}$ y examine a u'.

16. Sea $D = \frac{d}{dx}$ el operador de derivación en $\mathbb{R}$. Sean f y g funciones n veces diferenciables en $\mathbb{R}$. Demuestre que
$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k g D^{n-k} f.$$

17. Sea $f(x) = e^{-x^2}$. Demuestre que para cada $n \geq 0$ existe un polinomio $p_n(x)$ tal que $D^n f(x) = p_n(x) f(x)$, y de esto concluya que $f(x) \in \mathcal{S}$.

18. Dada $f(x) = e^{-\pi x^2}$, calcule $f * f$. *Sugerencia:* use la trasformación de Fourier y el teorema de los siete incisos.

19. Calcule la transformación de Fourier de $f(x) = [|x| \leq 1]$ y aplique la fórmula de sumación de Poisson para demostrar que
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

20. Sea T una distribución temperada y $S(x) = e^{2\pi i a x} T(x)$ para $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\hat{S}(y) = T(y-a)$.

21. Sea T una distribución temperada y $S(x) = T(x-a)$ para $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\hat{S}(y) = e^{-2\pi i a y} T(y)$.

22. Demuestre que si se tiene una cuerda de longitud unitaria con extremos fijos y posición inicial
$$f(x) = \frac{xh}{p}[0 \leq x \leq p] + \frac{h(1-x)}{1-p}[p < x \leq 1]$$
y velocidad inicial nula, entonces los coeficientes de Fourier A_k tal que su posición está descrita por
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\pi k t) \operatorname{sen}(\pi k t)$$
son
$$A_k = \frac{2h \operatorname{sen}(k\pi p)}{\pi^2 k^2 p(1-p)}.$$

23. Considere una tira rectangular semiinfinita de metal cuyo extremo inferior coincide con el intervalo unitario y que se extiende sobre el semiplano superior. Suponga que el extremo inferior se encuentra a 100° C, los lados se encuentran a 0° C y la temperatura tiende a 0 conforme $y \to \infty$. Para encontrar la distribución de temperatura u de la placa, hay que resolver

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con las condiciones de frontera $u(x,0) = 100[0 \leq x \leq 1]$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$ y $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$. Resuelva por separación de variables y escriba la solución en términos de una serie de Fourier apropiada.

24. Demuestre que si $f \in \mathcal{S}$ y $u(x,y) = (f * \mathcal{P}_y)(x)$ (donde $\mathcal{P}_y = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ es el núcleo de Poisson) entonces u es dos veces continuamente diferenciable y armónica (esto es, satisface la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$).

25. Bajo las condiciones del ejercicio anterior, demuestre que $\lim_{y\to 0} \|u(x,y) - f(x)\|_2 = 0$.

26. Una *onda esférica* es la solución $u(x,t)$ del problema de Cauchy para la ecuación de onda $\mathbb{R}^d$ si es radial como función de x. Demuestre que u es esférica si, y sólo si, las funciones que son los datos de las condiciones iniciales son radiales ambas.

27. Sea A un grupo abeliano finito y χ uno de sus caracteres. Demuestre que, con la definición inicial de trasformación de Fourier, se cumple que

$$\hat{\chi}(\eta) = \sqrt{|A|}[\eta = \chi].$$

28. Demuestre, con la definición que dimos para la transformación de Fourier para grupos cíclicos, la identidad de Plancherel

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N} |\hat{f}(m)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}_N} |f(x)|^2.$$

29. Demuestre que para cualquier $m \in \mathbb{Z}_N$, se satisface

$$|\hat{f}(m)| \leq \frac{1}{N} \sum_{x\in\mathbb{Z}_n} |f(x)|.$$

30. El hexacordo güidoniano es $G = \{0,2,4,5,7,8\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$. Usando la transformación directa e inversa de Fourier, encuentre el contenido interválico de G y de su complemento $\mathbb{Z}_{12} \setminus G$, y verifique que coinciden, según indica el teorema del hexacordo. Puede hacerlo por medio de Octave, en cuyo caso debe transcribir la sesión de usuario correspondiente.