Hemos hablado de conjuntos en relación al dominio de las interpretaciones del lenguaje de primer orden, pero no hemos dicho qué son. Y así vamos a permanecer, pues lo que importa es lo que hacen, y no lo que son.

Tenemos la idea de que son “agrupaciones” de objetos, pero lo esencial de las mismas es que podemos saber cuáles objetos están en uno en particular y cuáles no. Si x pertenece al conjunto A, entonces escribimos

$$x \in A,$$

y decimos que x es un *elemento* de A.

Cuando conocemos a todos los elementos de un conjunto, los escribimos separados por comas y encerrados entre llaves, por ejemplo

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Así, por ejemplo, $1 \in A$ pero $10 \notin A$.

Axioma 1 (de existencia)**.** Existe un conjunto V para el que la proposición $x \in V$ siempre es falsa. Es decir, V es un conjunto que no tiene elementos.

Axioma 2 (de extensión)**.** Dados los conjuntos A y B, diremos que $A = B$ si, y sólo si,

$$\forall x((x \in A) \leftrightarrow (x \in B)).$$

Coloquialmente, tenemos que dos conjuntos son iguales si cualquier elemento del primero también lo es del segundo y recíprocamente.

Ejemplo 42.

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &= \{3,2,1\}, \\ \{1,2,2,3,3,3\} &= \{1,2,3\}, \\ \{1,2,2,3\} &\neq \{1,3\}. \end{aligned}$$

Proposición 4. *Existe un único conjunto que no tiene elementos.*

Demostración. Supongamos que V_1 y V_2 son conjuntos vacíos y además $V_1 \neq V_2$. Para que esto ocurra, tendría que haber un elemento en alguno de los dos que no esté en el otro. ¡Pero esto es imposible, porque están vacíos! La contradicción vino de suponer que $V_1 \neq V_2$, así que $V_1 = V_2$. $\square$

Por este resultado es que podemos denotar al único conjunto vacío con $\emptyset$ o $\{\}$.

Axioma 3 (Esquema de comprensión)**.** Sea $P(x)$ un predicado. Para cualquier conjunto A existe un conjunto B tal que $x \in B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $P(x)$. Usamos la notación

$$B = \{x \in A : P(x)\}.$$

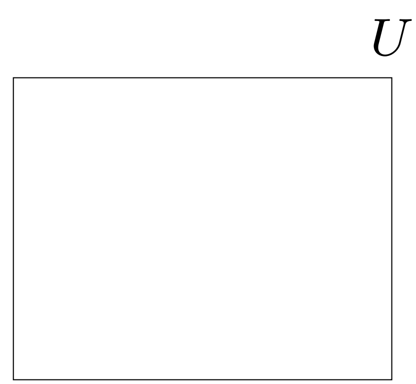
Teorema 5 (B. Russell, 1902). *No existe el conjunto de todos los conjuntos. En otras palabras, la colección de todos los conjuntos no puede ser un conjunto.*

Demostración. Supongamos que existiera tal cosa y llamémosla U. Definamos la propiedad $P(x) : x \notin x$, es decir, x satisface P si no es elemento de sí mismo. Por el esquema de comprensión, debe existir el conjunto

$$R = \{x \in U : P(x)\} = \{x \in U : x \notin x\}.$$

Como U es el conjunto de todos los conjuntos, entonces $R \in U$. Ahora bien, ¿Se cumple que $R \in R$? Si es así, entonces por definición $R \notin R$. Pero si $R \notin R$, entonces cumple el requisito para estar en R, o sea $R \in R$. La contradicción proviene de suponer que U existe. $\square$

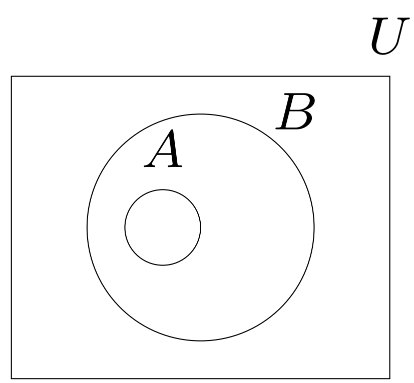
Por este teorema es que todos nuestros conjuntos los construiremos recurriendo a otro conjunto más grande, que llamaremos *universo* y al que normalmente le asignaremos la letra U. Para entender más fácilmente las construcciones, usamos los llamados *diagramas de Venn-Euler*.



Definición 20. Dados los conjuntos A y B, decimos que A es un *subconjunto* de B si, y sólo si, siempre que $x \in A$ entonces $x \in B$ (en símbolos, $\forall x((x \in A) \to (x \in B))$). Se denota este hecho con $A \subseteq B$.

Escolio 3. Obsérvese que $A = B$ es equivalente a $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$, debido a la equivalencia lógica

$$(x \in A) \leftrightarrow (x \in B) \dashv\vdash ((x \in A) \to (x \in B)) \wedge ((x \in B) \to (x \in A)).$$



Ejemplo 43. Si definimos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{1, 4\}$, tenemos que $A \subseteq B$, pero no que $C \subseteq A$ ni $C \subseteq B$, pese a que C tiene elementos en común con A y con B. Eso no basta: todos los elementos de C tendrían que ser elementos de A para ser uno de sus subconjuntos.

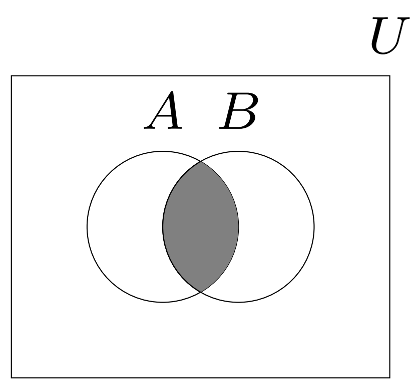
Proposición 5. *El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.*

Demostración. Sea A un conjunto arbitrario. Para que $\emptyset \subseteq A$, es necesario y suficiente que se cumpla $\forall x((x \in \emptyset) \to (x \in A))$, según la definición. Pero el antecedente de la implicación del alcance del cuantificador $\forall x$ siempre es falso, por lo que la fórmula siempre es verdadera, sin importar quién sea x. El resultado se sigue. $\square$

Ejercicio 2. Demuestre que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Es decir, si A es un conjunto, entonces $A \subseteq A$.

Dados dos conjuntos A y B, existe el conjunto $A \cap B$ (llamado *intersección* de A y B) que consta de todos x tal que $x \in A$ y $x \in B$. En efecto, si definimos $P(x) : x \in B$, por el esquema de comprensión existe

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}.$$



Ejemplo 44. $\{1, 2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 3, 6, 9\} = \{1, 3\}$.

Axioma 4 (del par)**.** Para cualesquiera a y b existe un conjunto C tal que $x \in C$ si, y sólo si, $x = a$ o $x = b$.

Este axioma permite construir un conjunto “pegando” “dos” elementos.

Ejemplo 45. Hasta ahora el único conjunto que sabemos que existe de forma efectiva es $\emptyset$. Si tomamos entonces $a = b = \emptyset$, el axioma del par nos dice que podemos construir el conjunto $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$. Este conjunto ¡ya no es vacío! En efecto, la proposición $\emptyset \in \{\emptyset\}$ es verdadera.

Axioma 5 (de la unión)**.** Para cualquier conjunto S, existe un conjunto R tal que $x \in R$ si, y sólo si, $x \in X$ para algún $X \in S$.

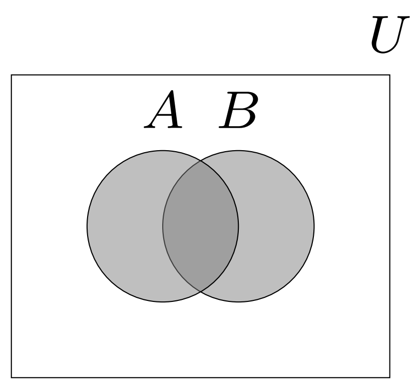
Ejemplo 46. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$. Por el axioma del par, podemos construir el conjunto $S = \{A, B\} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Entonces R sería

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

En efecto: por ejemplo, $1 \in R$ porque $1 \in A \in S$, y $4 \in R$ porque $4 \in B \in S$, y así con todos.

En general, si A y B son conjuntos, y aplicamos el axioma del par para obtener $\{A, B\}$ y luego el de unión para "pegar" todos los elementos de A y B, obtenemos su *unión*, que se denota con $A \cup B$. Así

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in A : x \in B\} = \{x \in B : x \in A\} \\ &= \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}. \end{aligned}$$



Ejemplo 47. $\{1, 2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 3, 6, 9\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Axioma 6 (del conjunto potencia)**.** Para todo conjunto X, existe un conjunto $\wp X$ tal que $A \in \wp X$ si, y sólo si, $A \subseteq X$. Es decir: si reunimos a **todos** los subconjuntos de un conjunto, podemos conformar un conjunto con dicha colección. A $\wp X$ se le llama *conjunto potencia* de X.

Ejemplo 48. ¿Cuáles son los subconjuntos del conjunto vacío $\emptyset$? De entrada, él mismo. Y no puede haber otro, pues si $A \subseteq \emptyset$, por un teorema anterior tenemos que $\emptyset \subseteq A$, y por un escolio, que $A = \emptyset$. Por lo tanto, $\wp\emptyset = \{\emptyset\}$.

Ejemplo 49. ¿Y qué conjunto es $\wp\{\emptyset\}$? De entrada en la lista siempre estará $\emptyset$. Pero $\{\emptyset\}$ no es vacío, y él mismo es subconjunto de sí mismo, o sea que también $\{\emptyset\}$ es subconjunto. Ya no hay otros, pues no tiene más elementos. Entonces $\wp\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

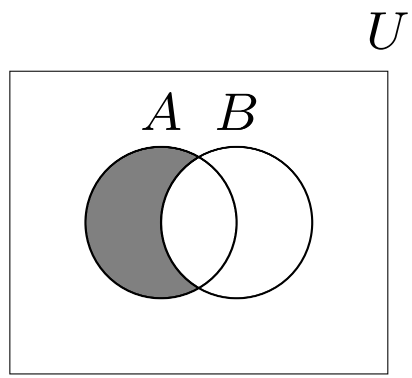
Ejemplo 50. ¿Qué conjunto es $\wp\{a,b\}$? Como en el ejemplo anterior, tenemos a $\emptyset$ y $\{a,b\}$ en la lista. Pero ahora hay algunos más, a saber: $\{a\}$ y $\{b\}$. Así

$$\wp\{a,b\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Ejercicio 3. Encuentre $\wp\{a,b,c\}$. *Sugerencia:* Tiene ocho elementos en total.

Otras operaciones con conjuntos que son útiles son: la *diferencia* de dos conjuntos A y B, que denotamos con $A \setminus B$ y que corresponde a

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

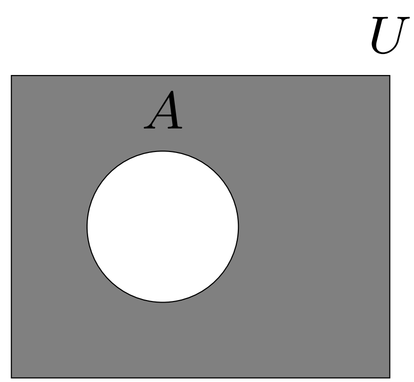


Ejemplo 51. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, \alpha, \beta\}$, entonces

$$A \setminus B = \{1, 3\},$$
$$B \setminus A = \{\alpha, \beta\}.$$

También está el *complemento* (respecto al universo U) del conjunto A, que denotamos con $\complement A$ y corresponde a

$$\complement A := \{x \in U : x \notin A\}.$$



Escolio 4. Es inmediato de las definiciones que $\complement A = U \setminus A$.

Para una penúltima operación entre conjuntos que estudiaremos, necesitamos definir lo que es un *par ordenado*

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \wp\{a, b\}$$

que se puede construir aplicando tres veces el axioma del par.

Proposición 6. *Se satisface que* $(a,b)=(c,d)$ *si, y sólo si,* $a=c$ *y* $b=d$.

Demostración. La parte del "sólo si" es bastante obvia, así que sólo demostraremos la afirmación directa. Si $a \neq b$, entonces forzosamente $\{a\}=\{c\}$ y $\{a,b\}=\{c,d\}$, y se sigue de inmediato que $a=c$ y $b=d$, según la definición de igualdad de conjuntos. Por otra parte, si $a=b$, entonces $(a,b)=\{\{a\}\}$ tiene un sólo elemento, lo que obliga a que también $c=d$ para que (c,d) no tenga dos. Pero entonces $(a,b)=\{\{a\}\}=\{\{d\}\}=(c,d)$, y en consecuencia $a=d$ por la igualdad de conjuntos, o sea $a=b=c=d$. $\square$

Definición 21. El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B, que denotaremos con $A \times B$, es

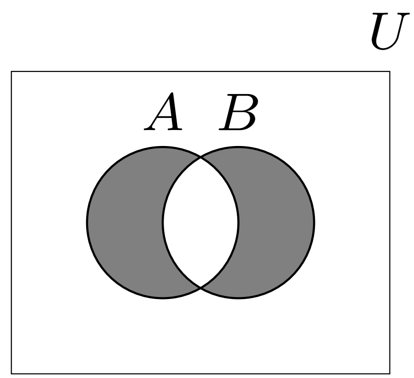
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo 52. El producto cartesiano de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\alpha, \beta\}$ es

$$A \times B = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \alpha), (1, \beta), (2, \beta), (3, \beta)\}.$$

Una última operación que veremos es la *diferencia simétrica*

$$A \triangle B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



Ejemplo 53. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, \alpha, \beta\}$, entonces

$$A \triangle B = \{1, 3, \alpha, \beta\}.$$

Ejercicio 4. Dados los conjuntos $A = \{4, 3, 9\}$, $B = \{10, 9, 6\}$ y $C = \{2, 6, 7, 4\}$ en el universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, encuentre

1. $A \cap B \cap C$.
2. $(A \cup B) \setminus C$.
3. $(\complement A) \cap (\complement B)$
4. $A \cap (B \cup C)$.
5. $A \triangle B \triangle C$.
6. $A \times B$.

Construya los diagramas de Venn-Euler correspondientes donde sea posible, coloreando apropiadamente el resultado.

La razón por la que la diferencia simétrica es útil es por las siguientes identidades.

$$
\begin{aligned}
A \triangle \emptyset &= A, \\
A \triangle A &= \emptyset, \\
A \triangle B &= B \triangle A, \\
(A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C), \\
A \cap (B \triangle C) &= (A \cap B) \triangle (A \cap C), \\
A \cap U &= A, \\
A \cap A &= A.
\end{aligned}
$$

Es decir: podemos manipular las operaciones con conjuntos como si $\triangle$ fuera la “suma” y $\cap$ fuera la “multiplicación”, donde el cero es $\emptyset$ y el 1 es U.

Considerando además que

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \\
A \setminus B &= (A \triangle B) \cap A, \\
\complement A &= U \triangle A,
\end{aligned}
$$

podemos demostrar cualquier identidad que involucre a las otras operaciones en términos de $\triangle$ y $\cap$.

Por ejemplo

$$\begin{aligned}\complement\complement A &= U\triangle(U\triangle A)\\ &= (U\triangle U)\triangle A\\ &= \emptyset\triangle A = A.\end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned}\complement(A\cup B) &= U\triangle((A\triangle B)\triangle(A\cap B))\\ &= (U\cap U)\triangle(A\cap U)\triangle(U\cap B)\triangle(A\cap B)\\ &= ((U\triangle A)\cap U)\triangle((U\triangle A)\cap B)\\ &= (U\triangle A)\cap(U\triangle B) = (\complement A)\cap(\complement B).\end{aligned}$$

Ejercicio 5. Demuestre que $\complement(A\cap B) = (\complement A)\cup(\complement B)$.