Puesto que demostrar por contradicción es una técnica muy común en la matemática, ilustraremos cómo se usan las equivalencias lógicas para manipular la negación de la conclusión a fin de utilizar la forma resultante de manera más efectiva.

Ejemplo 22. Obtengamos la negación de $p \leftrightarrow q$.

$$\begin{aligned}
\neg(p \leftrightarrow q) &\dashv\vdash \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \\
&\dashv\vdash \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \\
&\dashv\vdash (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\
&\dashv\vdash ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \\
&\dashv\vdash ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \\
&\dashv\vdash (p \vee q) \wedge \neg(q \wedge p).
\end{aligned}$$

Vale notar de lo anterior que, si $\mathcal{T}$ es una tautología arbitraria, entonces para cualquier forma proposicional $\mathcal{A}$ se cumple

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{T} \dashv\vdash \mathcal{A},$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{T} \dashv\vdash \mathcal{T},$$

mientras que si $\mathcal{F}$ es una contradicción arbitraria, entonces

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \dashv\vdash \mathcal{F},$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{F} \dashv\vdash \mathcal{A}.$$

Aparte de señalar cuándo es correcto un argumento, vale la pena considerar dos casos *falaces* comunes del razonamiento.

Ejemplo 23 (Falacia de afirmar el consecuente)**.** Resulta que

$$p \to q, q \nvdash p,$$

como lo evidencia la tabla de verdad.

((p	$\to$	q)	$\wedge$	q)	$\to$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F

Si los médicos hombres colaboran con colegas mujeres, entonces la tasa de mortalidad femenina por infartos agudos al miocardio baja.

(Brad N. Greenwood, Seth Carnahan, and Laura Huang, *Patient–physician gender concordance and increased mortality among female heart attack patients*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 6 de agosto de 2018)

Definiendo

- p : "Los médicos hombres colaboran con colegas mujeres",
- q : "La tasa de mortalidad femenina por infartos agudos al miocardio baja",

tenemos que la afirmación del artículo del PNAS es $p \to q$.

Es erróneo, por lo tanto, razonar que el hecho de que en un hospital la tasa de mortalidad femenina por infartos agudos al miocardio baja, junto con el resultado de la investigación de Greenwood et al., nos permite concluir que los médicos de ese hospital colaboran con sus colegas mujeres. La tasa podría bajar también por que la población femenina deja de fumar o se reduce el estrés en su trabajo.

He aquí otro argumento falaz.

Ejemplo 24 (Falacia de negar el antecedente)**.** Resulta que

$$p \to q, \neg p \nvdash \neg q,$$

como lo evidencia la tabla de verdad.

((p	$\to$	q	) $\wedge$	$\neg$	p	) $\to$	$\neg$	q
V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V	F

Retomando el caso de la tasa femenina de muertes por infarto agudo al miocardio, también es falaz considerar que, por el sólo hecho de que los médicos hombres no colaboran con sus colegas mujeres, se pueda concluir que la tasa no bajará. Si los hábitos de prevención en la población mejoran, la tasa bajará pese a que los médicos no tengan conciencia de género.

Hay inferencias lógicas que no pueden justificarse sobre la base del cálculo proposicional.

Ejemplo 25. "Hoy los youtubers tienen una escala que ningún autor de alta cultura va a tener. [...] Me temo que en cinco años los cuentistas van a desaparecer, los novelistas estarán al final de la cola. Y adelante estarán muy claramente los youtubers, la feria será para ellos."

(Mijail Palacios, *Luis Jochamowitz: "Los youtubers tienen una escala que ningún autor de alta cultura va a tener*", Perú21, 7 de agosto de 2018)

En esencia, lo que declara Luis Jochamowitz es lo siguiente respecto al futuro.

> Todo invitado de la feria es yutuber de gran escala. Ningún autor de alta cultura es yutuber de gran escala. Por lo tanto, ningún autor de alta cultura es invitado de la feria.

Ejemplo 26. Todo homicidio doloso implica por lo menos dos años de prisión para el responsable.

(Código Penal Federal, artículos 307 y 308)

Algunos delitos de alto impacto son homicidios dolosos.

(Programa Nacional de Seguridad Pública 2014-2018, Diario Oficial de la Federación, 30 de marzo de 2014)

Por lo tanto, algunos delitos de alto impacto implican por lo menos dos años de prisión para el responsable.

Las palabras clave aquí son "todo", "algún" ("existe"), "ningún", que capturan el hecho de que el valor de verdad de los enunciados de los ejemplos *depende de qué cosa estemos hablando*.

Supongamos que $P(x)$ representa el aserto de que el objeto x tiene una propiedad P. Entonces

$$\forall x P(x)$$

significa que la propiedad P se cumple **para todo** x. Por otro lado,

$$\exists x P(x)$$

significa que la propiedad P se cumple **para algún** x (puede ser más de uno).

Ejemplo 27. Respecto al argumento de Luis Jochamowitz, podemos representar

1. $F(x)$: “x es un invitado de la feria”.
2. $Y(x)$: “x es un yutuber de gran escala”.
3. $A(x)$: “x es un autor de alta cultura”.

y el argumento queda

1. $\forall x(F(x) \to Y(x))$.
2. $\neg(\exists x(A(x) \wedge Y(x)))$.

---

3. $\neg(\exists x(A(x) \wedge F(x)))$.

Ejemplo 28. Respecto al argumento de los delitos de alto impacto, podemos representar

1. $H(x)$: "x es un homicidio doloso".
2. $P(x, y)$: "x implica por lo menos dos años de prisión para y".
3. $A(x)$: "x es un delito de alto impacto".

y el argumento queda

1. $\forall x(H(x) \to P(x, y))$.
2. $\exists x(A(x) \land H(x))$.

---

3. $\exists x(A(x) \land P(x, y))$.

“Atkinson escribió a The Times, diciendo: ‘Como beneficiario de por vida de la libertad para hacer bromas sobre la religión, creo que la broma de Boris Johnson sobre el que quienes visten la burka parecen buzones de correo es bastante buena. Todas las bromas sobre religión causan ofensa, así que no tiene sentido disculparse por ellas.’”

(Tim Stickings, *Comedian Rowan Atkinson wades into Boris Johnson burka row as he urges the ex-Foreign Secretary NOT to say sorry because ’you should only ever apologise for a bad joke...this is a pretty good one’*, Daily Mail, 9 de agosto de 2018)

Sobre las palabras de Atkinson puede formularse el siguiente argumento.

> Boris Johnson hizo un comentario sobre la burka que es una broma y trata sobre la religión. Todas las bromas sobre la religión son ofensivas. Por lo tanto, Boris Johnson hizo un comentario sobre la burka que es ofensivo.

Tomando

- $H(x, y)$: "x hace y".
- $B(y)$: "y es una broma".
- $R(y)$: "y trata sobre la religión".
- $O(y)$: "y es ofensivo".
- b : Boris Johnson.
- k : el comentario sobre la burka.

tenemos

1. $H(b, k) \wedge B(k) \wedge R(k)$
2. $\forall x(B(x) \wedge R(x) \to O(x))$

---

3. $H(b, k) \wedge O(k)$

Ejemplo 29. “Todo cuadrado de un número real es mayor o igual a 0”.

Si tomamos

- $R(x)$: “x es un número real”,
- $M(x, y) : x \geq y$,
- $f(x) = x^2$,

el enunciado anterior queda como

$$\forall x(R(x) \to M(f(x), 0)).$$

A diferencia del cálculo proposicional, ahora tenemos

1. Variables individuales: x, y, etcétera. Representan entes arbitrarios.
2. Constantes individuales: b, k, 0, etcétera. Representan entes específicos, como Boris Johnson o un comentario en particular que él hizo.
3. Letras de predicados: A, F, H, Y, etcétera. Representan acciones, esto es, *predicados*. Reservamos las letras mayúsculas para los predicados.
4. Letras de funciones: f, g, h. Representan "operaciones", como elevar al cuadrado, calcular coseno, sumar dos números, etcétera.

Definición 10. Un *término* es

1. una variable o constante individual,
2. si f es una letra de función y $t_1 \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
3. nada más que lo dicho en los puntos anteriores.

Ejemplo 30. Tenemos que x, $f(x)$, b y 0 son términos.

Definición 11. Una fórmula atómica ahora es una letra de predicado A evaluada en los términos $t_1, \ldots, t_n$, es decir, $A(t_1, \ldots, t_n)$.

Ejemplo 31. En el ejemplo de Rowan Atkinson, la expresión $H(b, k)$ que corresponde a "Boris Johnson hace un comentario sobre la burka", es una fórmula atómica.

Definición 12. Las fórmulas bien formadas del *lenguaje de primer orden* son:

1. todas las fórmulas atómicas,
2. las que, cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fórmulas atómicas y x es una variable, entonces son de la forma $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$, $\forall x\mathcal{A}$ y $\exists x\mathcal{A}$.
3. única y exclusivamente lo descrito en los incisos anteriores.

Definición 13. En la fbf $\forall x\mathcal{B}$ ($\exists x\mathcal{B}$), a $\mathcal{B}$ se le llama el *alcance* o *ámbito* del cuantificador $\forall x$ ($\exists x$).

Ejemplo 32. En la fbf

$$\forall x(B(x) \land R(x) \to O(x))$$

su alcance es

$$(B(x) \land R(x) \to O(x)).$$

Escolio 2. Los cuantificadores tienen precedencia mayor que $\to$ y $\leftrightarrow$ pero menor que $\neg$, $\land$ y $\lor$.

Definición 14. La ocurrencia de una variable x en una fbf $\mathcal{A}$ se dice *ligada* si ocurre con los cuantificadores $\forall x$ o $\exists x$ o cae dentro del alcance de alguno de ellos. Si una variable no es ligada, entonces se llama *libre*.

Ejemplo 33. En la fbf

$$H(x, y) \to \forall x R(x)$$

la primera aparición de x es libre pero la segunda es ligada. La única aparición de y es libre.

Definición 15. Si $\mathcal{A}$ es una fbf y t es un término, decimos que t es *libre para* x *en* $\mathcal{A}$ si ninguna ocurrencia libre de x en $\mathcal{A}$ cae en el alcance del cuantificador $\forall y$, donde y es una variable de t.
Ejemplo 34. El término x es libre para z en $A(z)$, pero no es libre para z en $\forall x A(z)$.

He aquí una mini-guía para hacer traducciones del lenguaje coloquial al lenguaje de primer orden.

Forma coloquial	**Fórmula bien formada**
Todos los A son B	$\forall x(A(x) \to B(x))$
Algunos A son B	$\exists x A(x) \wedge B(x)$
Ningún A es B	$\forall x(A(x) \to \neg B(x))$, $\neg(\exists x(A(x) \wedge B(x)))$

Definición 16. Una *interpretación* M de un lenguaje de primer orden consiste en la especificación un conjunto D (llamado *dominio*) de objetos que corresponde a los valores que pueden tomar las variables, a la elección de algunos de ellos para las constantes y del significado específico de los predicados y las funciones.

Ejemplo 35. En el ejemplo de Jochamowitz, la interpretación tiene por dominio a todos los seres humanos, que es donde tiene sentido ver si son autores de alta cultura, yutubers o invitado a la feria.

Ejemplo 36. En el ejemplo de los delitos de alto impacto, la interpretación tiene como dominio al conjunto de los delitos cometidos en México y a los responsables por ellos, pues sólo en tal caso son aplicables las definiciones de “delito de alto impacto” o las penas para homicidios dolosos.

Ejemplo 37. En el ejemplo de Rowan Atkinson, la interpretación tiene por dominio al conjunto de los seres humanos junto con los enunciados específicos que realizan, de modo que b alude específicamente a Boris Johnson y k a su comentario sobre las burkas.

Definición 17. 1. Una fbf $\mathcal{A}$ es *verdadera para la interpretación* M si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es verdadera sin importar qué valores tomen sus variables libres dentro del dominio de M.

2. Una fbf $\mathcal{A}$ es *falsa para* M si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es falsa sin importar qué valores tomen sus variables libres dentro del dominio de M.

3. Una interpretación M es un *modelo* para un conjunto Γ de fbf si, y sólo si, cada fbf en Γ es verdadera para M.

Ejemplo 38. En el ejemplo de Luis Jochamowitz con la interpretación discutida, $\mathcal{A} = \forall x(F(x) \to Y(x))$ es verdadera. Sin embargo, si $F(x)$ es "x es un número primo" y $Y(x)$ es "x es un número impar" y el dominio son los números naturales, es falsa, pues $F(2)$ es verdadera pero $Y(2)$ es falsa.

Definición 18. Una fbf $\mathcal{A}$ es

1. *lógicamente válida* si es verdadera para cualquier interpretación;
2. *satisfactible* si es verdadera para alguna interpretación con al menos una sustitución de sus variables.

Un conjunto Γ de fbf es *satisfactible* si, y sólo si, existe una interpretación para la cual una sustitución de variables hace verdaderas a todos sus integrantes.

Definición 19.
- Se dice que la fbf $\mathcal{A}$ *implica lógicamente* a otra $\mathcal{B}$ si, para cualquier interpretación, cualquier asignación de las variables libres que hace verdadera a $\mathcal{A}$ también hace verdadera a $\mathcal{B}$.
- En general, si Γ es un conjunto de fbf, decimos que implica lógicamente a $\mathcal{B}$ si en cada interpretación cada asignación de las variables que hace verdadera a todas las fbf de Γ también hace verdadera a $\mathcal{B}$.
- Dos fbf son *lógicamente equivalentes* si se implican lógicamente entre sí.

Para construir la teoría formal llamada **cálculo de predicados** necesitamos los axiomas y las reglas de inferencia. Los axiomas, respecto a las fbf $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, son:

1. los tres del cálculo proposicional (con la nueva interpretación de las fbf),
2. $\forall x \mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(t)$ si t es libre para x en $\mathcal{A}$. De este axioma se desprenderá la validez de la *especificación universal*.
3. $\forall x(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \forall x \mathcal{B})$ siempre que $\mathcal{A}$ no tenga ocurrencias libres de x.

Las reglas de inferencia son sólo dos:

1. el modus ponendo ponens,
2. la *generalización universal* (GU): $\forall x\mathcal{A}$ se sigue de $\mathcal{A}$.

El cálculo de predicados es

- completo, esto es, todo teorema es lógicamente válido y recíprocamente (esto último lo demostró Kurt Gödel en 1930);
- consistente, es decir, no puede ser que $\mathcal{A}$ y $\neg\mathcal{A}$ sean teoremas.

Esto es, el cálculo de predicados es igual de confiable que el cálculo proposicional.

A continuación estudiaremos cómo se realiza la inferencia natural en el cálculo de predicados. Pero antes hay que notar que es bastante claro que la generalización y especificación universal son muy útiles para manejar el cuantificador $\forall x$, pero que no tenemos algo parecido para $\exists x$. La razón es que existe la equivalencia

$$\exists x\mathcal{A} \dashv\vdash \neg(\forall x\neg\mathcal{A})$$

y que llamaremos negación del universal (NU).

Tiene sentido: si $A(x)$: "x es inmortal", entonces $\exists x A(x)$ significa que existe alguien que es inmortal. Por otro lado, $\neg(\forall x \neg A(x))$ dice que no es el caso que todos no son inmortales, es decir, alguien (posiblemente más de uno) satisface que no es mortal. Nótese que en particular

$$\neg\exists x\mathcal{A} \dashv\vdash \neg(\neg(\forall x\neg\mathcal{A})) \dashv\vdash \forall x\neg\mathcal{A}$$

que llamaremos negación del existencial (NE). Juntos la NU y la NE pueden verse como una generalización de las leyes de de Morgan.

Ejemplo 39 (Ricardo Sáenz). “Son causa de pérdida de registro de un partido político: [...] c) No obtener por lo menos el tres por ciento de la votación válida emitida en alguna de las elecciones federales ordinarias para Diputados, Senadores o Presidente de los Estados Unidos Mexicanos, tratándose de un partido político nacional, o de Gobernador, diputados a las legislaturas locales y ayuntamientos, así como de Jefe de Gobierno, diputados a la Asamblea Legislativa y los titulares de los órganos político-administrativos de las demarcaciones territoriales del Distrito Federal, tratándose de un partido político local, si participa coaligado;”

(Artículo 94 de la Ley General de Partidos Políticos)

Definamos $P(x)$: "El partido en cuestión obtiene al menos el 3 % de la votación en la elección x". La condición para perder el registro es

$$\neg\exists x P(x)$$

y esto es lógicamente equivalente a

$$\forall x \neg P(x)$$

o sea "en todas las elecciones el partido en cuestión no obtuvo al menos el 3 % de la votación" o bien "en todas las elecciones el partido en cuestión tuvo menos del 3 % de la votación".

Ésta es la razón por la que el Pes y Panal perdieron su registro en la elección federal de 2018. Pese a la baja votación por el PRD y el PVEM, no perdieron su registro pues lograron porcentajes superiores al 3 % en las diputaciones locales de la Ciudad de México.

A continuación veremos cómo aplicar el razonamiento natural para verificar la validez de un argumento para el caso del cálculo de predicados. La estrategia básica es:

1. Eliminar cuantificadores usando especificaciones.
2. Aplicar los métodos del cálculo proposicional.
3. Reinstalar cuantificadores con generalizaciones si hace falta.

Ejemplo 40. Construyamos una demostración del argumento de Jochamowitz.

1. $\forall x(F(x) \to Y(x))$ Hip.
2. $\neg(\exists x(A(x) \land Y(x)))$ Hip.
3. $\forall x(F(x) \to Y(x)) \to (F(x) \to Y(x))$ Axioma 2
4. $\forall x(\neg(A(x) \land Y(x)))$ NE 2
5. $\forall x(\neg(A(x) \land Y(x))) \to (\neg((A(x) \land Y(x)))$ Axioma 2
6. $F(x) \to Y(x)$ MP 1,3 (EU 1)
7. $\neg(A(x) \land Y(x))$ MP 4,5 (EU 4)

8. $\neg A(x) \vee \neg Y(x)$ LdM 7
9. $A(x) \to \neg Y(x)$ EID 8
10. $Y(x) \to \neg A(x)$ CP 9
11. $F(x) \to \neg A(x)$ SH 6,10
12. $\neg F(x) \vee \neg A(x)$ EID 11
13. $\neg(F(x) \wedge A(x))$ LdM 12
14. $\forall x \neg(A(x) \wedge F(x))$ GU 13
15. $\neg \exists x(A(x) \wedge F(x))$ NE 14

Cuando tenemos un cuantificador existencial, en lugar de convertirlo a un universal y aplicar axiomas, es más directo aplicar la llamada *especificación existencial* (EE).

$$\frac{\exists x \mathcal{A}(x)}{\mathcal{A}(\alpha)}$$

donde $\mathcal{A}(x)$ significa que nos interesa cada aparición libre de x en $\mathcal{A}$. Aquí α es llamado un *nombre ambiguo*, y se reservan letras griegas para ellos. Algunas consideraciones:

- Se deben especificar cuantificadores existenciales antes que los universales.
- Se usa un nombre ambiguo distinto por cada especificación.

Emparejada con la especificación existencial viene la *generalización existencial* (GE)

$$\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\exists x \mathcal{A}(x)}$$

donde x reemplaza a toda aparición del nombre ambiguo α, pero cuidando que x no quede ligada en el alcance.

Ejemplo 41. Podemos demostrar la validez del argumento de los delitos de alto impacto.

1. $\forall x(H(x) \to P(x,y))$ Hip
2. $\exists x(A(x) \wedge H(x))$ Hip
3. $A(\alpha) \wedge H(\alpha)$ EE 2
4. $H(\alpha) \to P(\alpha,y)$ EU 1
5. $H(\alpha)$ Simp 3
6. $P(\alpha,y)$ MP 4,5
7. $A(\alpha)$ Simp 3
8. $A(\alpha) \wedge P(\alpha,y)$ Conj 6,7
9. $\exists x(A(x) \wedge P(x,y))$ GE 8