Lógica Matemática

Octavio Alberto Agustín Aquino
octavioalberto@mixteco.utm.mx
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Cubo 3

Agosto de 2018

> “[El propósito del desarrollo sostenible] es garantizar una vida sostenible, pacífica, próspera y justa en la tierra para todos, ahora y en el futuro. [...] Existe un acuerdo general de que los ciudadanos de sostenibilidad necesitan algunas competencias clave que les permitan participar constructiva y responsablemente en el mundo de hoy. Las competencias describen los atributos específicos que los individuos necesitan para la acción y la autonomía en distintos contextos y situaciones complejas.”

(Unesco, *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible*, 2017, pp. 6 y 10)

Una de las ocho competencias que enlista la Unesco es el

pensamiento crítico.

¿Y qué es?

"El **pensamiento crítico** [..] es pensamiento razonable, reflexivo, responsable y hábil que se enfoca en decidir qué creer o hacer. Una persona que piensa críticamente

1. puede formular preguntas apropiadas,
2. colectar información relevante,
3. ordenar eficiente y creativamente dicha información,
4. razonar **lógicamente** sobre esta información,
5. y **obtener conclusiones verosímiles y confiables** sobre el mundo

que le permitan vivir y actuar exitosamente en él."

(Steven Schafersman, *Introduction to Critical Thinking*, 1991)

¿Por qué tiene que ver la lógica (matemática) con todo esto?

“[L]os fundamentos de lógica formal [...] son esenciales porque afinan las habilidades de los estudiantes para entender, analizar, evaluar y articular argumentos. [...] Tomemos, por ejemplo, un argumento típico: la homosexualidad es inmoral porque es contranatural. No hay una falacia informal obvia aquí. Pero personas con un mínimo de entrenamiento ven esto como [...] ‘Si algo es contranatural, entonces es inmoral’.

"Una vez que se señala esto, el argumento no es ni tantito convincente porque la premisa mayor es patentemente falsa; por ejemplo, si ser contranatural hace a algo inmoral, entonces tocar la viola o usar medicamento sintéticos para tratar enfermedades sería inmoral."

(Donald Hatcher, *Why Formal Logic is Essential for Critical Thinking*, Informal Logic, Vol. 19, No. 1, pp. 77-89, 1999)

Empecemos, entonces, por definir el material más básico con el que trabajaremos.

enunciado

3. Un enunciado es una secuencia con valor comunicativo, sentido completo y entonación propia.

(Diccionario de la lengua española, edición del Tricentenario, Real Academia Española, 2017)

Definición 1. Una *proposición lógica* es un enunciado declarativo que puede calificarse como verdadero o falso.

Ejemplo 1.

1. En México está prohibida la esclavitud.

2. Cocijo es un dios egipcio.

3. Se satisface que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 0$.

No todos los enunciados son proposiciones lógicas.

Ejemplo 2.

1. ¿Qué desayunaste hoy?

2. ¡Cállense!

3. Esta oración es falsa.

Definición 2. Una proposición lógica que no puede descomponerse en otras más simples se llama *atómica*. De lo contrario, se dice *compuesta*.

Ejemplo 3. La proposición lógica "Fernanda González ganó seis medallas en los Juegos Centroamericanos y del Caribe 2018" es atómica, pero "Una marca famosa de juguetes cerrará sus fábricas en México y despedirá a mil 200 trabajadores a nivel mundial" no lo es.

A una proposición lógica atómica la representaremos con una letra, como en el álgebra, que llamaremos *variable proposicional*, y sólo puede tomar los valores V (verdadero) y F (falso).

Respecto al ejemplo anterior, podemos poner

> p : "Una marca famosa de juguetes cerrará sus fábricas en México"

y

> q : "Una marca famosa de juguetes despedirá a mil 200 trabajadores a nivel mundial".

En álgebra combinamos letras con sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, etcétera. En lógica también existen operadores lógicos, que pueden ser unarios (esto es, sólo necesitan una letra para saber su valor) o binarios (esto es, necesitan dos letras para obtener su valor).

El único operador unario que veremos es la *negación*, que representaremos con el símbolo $\neg$. Coloquialmente $\neg p$ se interpreta como "No es el caso que p". Por ejemplo

> $\neg p$: Una marca famosa de juguetes $\boxed{\text{no}}$ cerrará sus fábricas en México.

Para representar de forma rápida cómo cambia el valor de una proposición lógica según cambian los de sus variables proposicionales, se usa una *tabla de verdad*. Para la negación tenemos la siguiente.

p	$\neg p$
V	F
F	V

El resto de operadores (o *conectivos*) lógicos que estudiaremos son binarios. El primero es la *conjunción*: si p y q son variables proposicionales, la denotamos con $p \wedge q$ y la leemos “pe y cu”. La tabla de verdad es como sigue.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Coloquialmente, respecto al ejemplo que venimos manejando:

> $p \wedge q$: Una marca famosa de juguetes cerrará sus fábricas en México $\boxed{\text{y}}$ despedirá a mil 200 trabajadores a nivel mundial

La *disyunción*: si p y q son variables proposicionales, la denotamos con $p \vee q$ y la leemos "pe o cu". La tabla de verdad es como sigue.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Coloquialmente, respecto al ejemplo que venimos manejando:

> $p \vee q$: Una marca famosa de juguetes cerrará sus fábricas en México $\boxed{\text{o}}$ despedirá a mil 200 trabajadores a nivel mundial.

A menudo la disyuntiva que plantea esta conjunción no es excluyente, sino que expresa conjuntamente adición y alternativa: *En este cajón puedes guardar carpetas o cuadernos* (es decir, una u otra cosa, o ambas a la vez). En la mayoría de los casos resulta, pues, innecesario hacer explícitos ambos valores mediante la combinación *y/o*.

(Real Academia Española, *Diccionario panhispánico de dudas*, 2005)

La *implicación*: si p y q son variables proposicionales, la denotamos con $p \to q$ y la leemos “pe implica cu”. La tabla de verdad es como sigue.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(Nemotecnia: algo verdadero jamás implica a algo falso)

Coloquialmente, respecto al ejemplo que venimos manejando:

> $p \to q$: $\boxed{\text{Si}}$ una marca famosa de juguetes cierra sus fábricas en México $\boxed{\text{entonces}}$ despedirá a mil 200 trabajadores a nivel mundial.

En una implicación $p \to q$ a p se le llama *hipótesis*, *antecedente* o *premisa*, y a q se llama *conclusión*, *consecuencia* o *consecuente*.

La implicación es básicamente una relación de orden: lo falso es "menor o igual" que lo verdadero, y cualquier cosa es menor o igual que sí misma.

Otras formas coloquiales de expresar $p \to q$ aparte de si "p entonces q":

1. q, si p.
2. q solo si p.
3. p es una condición suficiente para q.
4. q es una condición necesaria para p.
5. q, siempre que p.
6. q, provisto que p.
7. No p, a menos que q.
8. q, a menos que no p.

Vale meditar sobre el significado de la implicación. La "cláusula del ocaso" del TLCAN propuesta por el gobierno de Donald Trump dice que

> [A]cabaría con el pacto si no se renegocia cada cinco años. (Noticieros Televisa, *México busca acelerar negociación del TLCAN, dice Ildefonso Guajardo*, 26 de julio de 2018)

Considerando que las proposiciones atómicas son r : "El pacto se renegocia cada cinco años." y s : "El pacto se acaba" tenemos que la cláusula del ocaso es $(\neg r) \to s$.

Formulaciones equivalentes:

1. Acabaría con el pacto solo si no se renegocia cada cinco años.
2. No renegociar cada cinco años es una condición suficiente para que acabe el pacto.
3. Que acabe el pacto es una condición necesaria para no renegociar cada cinco años.
4. Acabaría con el pacto, siempre que no se renegocie cada cinco años.
5. Acabaría con el pacto, provisto que no se renegocie cada cinco años.
6. No es el caso que no se renegocia cada cinco años a menos que acabe con el pacto.
7. Acabaría con el pacto, a menos que no sea el caso que no se renegocie cada cinco años.

Suponiendo que es válida la cláusula del ocaso, tenemos que:

- Si EEUU, México y Canadá no renegocian el pacto pasados cinco años, podemos tener por seguro que éste se termina.
- Pero, ¿qué sucede si los tres países lo renegocian pasados los cinco años? Puede suceder que el pacto continúe o se termine, no tendremos garantías basándonos exclusivamente en la cláusula del ocaso.

Esta podría ser la razón por la que ni México ni Canadá la aceptan.

> "'No me parece que debe tener esa cláusula [...] se necesita certidumbre y estabilidad en bien de las cadenas de suministro', señaló [Ildefonso] Guajardo".

(*TLCAN no debe incluir cláusula 'Sunset': México y Canadá*, El Financiero, 13 de octubre de 2017)

> "Tenía que resaltar que no hay posibilidad de que cualquier primer ministro canadiense firme un TLCAN que incluya una cláusula de ocaso de cinco años [...]".

(Josh Wingrobe y Greg Quinn, *Trudeau Says Pence Insisted on Nafta Sunset for a Trump Meeting*, Bloomberg, 31 de mayo de 2018)

La *bicondicional*: si p y q son variables proposicionales, la denotamos con $p \leftrightarrow q$ y la leemos "pe si, y sólo si, cu". La tabla de verdad es como sigue.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Coloquialmente, respecto al ejemplo que venimos manejando:

> $p \leftrightarrow q$: Una marca famosa de juguetes cerrará sus fábricas en México $\boxed{\text{si, y sólo si,}}$ despide a mil 200 trabajadores a nivel mundial.

Respecto al ejemplo de la cláusula del ocaso, si ésta fuera $(\neg r) \leftrightarrow s$, diría que

> [A]cabaría con el pacto si, y sólo si, no se renegocia cada cinco años.

Así, cuando no se renegocie cada cinco años, entonces se sabría que el pacto acaba; igualmente, si se renegocia cada cinco años, entonces tendríamos derecho a esperar que el pacto continuaría. Sin duda eso sería mucho más aceptable para los gobiernos de México y Canadá, pues el sólo acto de negociar prolongaría el TLCAN, sin importar el resultado de la negociación.

Cuando se representan proposiciones lógicas compuestas de forma simbólica, se deben obtener cierto tipo de secuencias de símbolos que llamaremos *formas proposicionales*. La definición es un caso clásico de *recursividad*.

Definición 3. Una *forma proposicional* es:

1. Una letra minúscula del alfabeto latino.
2. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas proposicionales, entonces también lo son $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\to\mathcal{B})$ y $(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$.
3. Nada más que lo anterior son formas proposicionales.

Ejemplo 4. Consideremos la siguiente proposición lógica.

> “Debido a las diversas reglas internas sobre represalias arancelarias, coordinar cualquier acción entre varios países ‘rápidamente se vuelve diabólicamente difícil’, comentó el diplomático. ‘La idea es que queremos saber que si vamos a la OMC, si utilizamos el TLC (Tratado de Libre Comercio de América del Norte) en nuestro caso o si tomamos represalias [por los aranceles de Trump a autos], nuestros socios harán cosas similares’, agregó el diplomático [mexicano anónimo].”

(Anthony Esposito y David Ljunggren, *Global auto powers plotting response to Trump auto tariff threats*, Reuters, 28 de julio de 2018)

Las proposiciones lógicas atómicas son:

- p : México recurre a la OMC por los aranceles de Trump a autos.
- q : México recurre al TLC por los aranceles de Trump a autos.
- r : México toma represalias por los aranceles de Trump a autos.
- s : Los socios comerciales de México tomarán medidas similares.

y obtenemos la forma proposicional

$$(((p \vee q) \vee r) \to s).$$

Ejemplo 5. Las cadenas pq, $p\neg$, $\to (p \vee q)$ o $\neg \leftrightarrow$ no son formas proposicionales.

Podemos construir tablas de verdad para formas proposicionales complicadas para estudiar su comportamiento ante cambios de las variables proposicionales que las componen. Se rellenan primero poniendo todas las combinaciones posibles de las variables, y luego según la construcción recursiva se van llenando las demás columnas.

Ejemplo 6. Respecto a la forma proposicional del ejemplo de los aranceles, tenemos la siguiente tabla de verdad.

$(((p$	$\vee$	$q)$	$\vee$	$r)$	$\to$	$s)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F
	1		2		3	

Como puede notarse, preservar todos los paréntesis para ajustarse a la definición de forma proposicional es muy latoso. Para ahorrar algunos existe el siguiente orden de precedencia: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ y finalmente $\leftrightarrow$. Es decir: se evalúan primero las negaciones, luego las conjunciones, luego las disyunciones, etcétera.

Ejemplo 7. Con el orden de precedencia, el ejemplo de los aranceles es

$$p \vee q \vee r \to s.$$

Ejemplo 8. La forma proposicional $\neg p \wedge q$ se debe interpretar como $(\neg p) \wedge q$, y no como $\neg(p \wedge q)$. En este último caso, para lograr tal interpretación los paréntesis son indispensables.

Vemos, pues, que una forma proposicional puede asignar diferentes valores a cada combinación de valores que propongamos para las variables proposicionales que la componen.

Definición 4. Una proposición lógica cuya forma proposicional siempre devuelve verdadero sin importar los valores de sus variables proposicionales se denomina *tautología*. Por el contrario, si siempre devuelve falso entonces se denomina *contradicción*. Una proposición lógica que no es ni una tautología ni una contradicción es una *contingencia*.

Ejemplo 9. "Mariano Rajoy ha dicho en rueda de prensa desde Portugal que [...] 'Esas decisiones se toman y se toman y se anuncian en el momento de tomarse.'" (*"Las decisiones se toman en el momento de tomarse"*, eldiario.es, 9 de mayo de 2012)

Si designamos p : "Se toma una decisión", entonces lo que dijo el ex-primer ministro español corresponde a la forma proposicional $p \to p$.

Tenemos la siguiente tabla de verdad.

p	$\rightarrow$	p
V	V	V
F	V	F

Lo dicho: es una tautología.

Ejemplo 10. “Porque todos podéis profetizar uno por uno, para que todos aprendan y todos sean exhortados. Los espíritus de los profetas están sujetos a los profetas; porque Dios no es Dios de confusión, sino de paz, como en todas las iglesias de los santos.”

(1 Corintios 14:31-33, La Biblia de las Américas)

“Por eso fue llamada Babel, porque allí confundió el Señor la lengua de toda la tierra; y de allí los dispersó el Señor sobre la faz de toda la tierra.”

(Génesis 11:9, op. cit.)

Si designamos p : “Dios confunde”, entonces de la Biblia se concluiría que $\neg p \wedge p$.

Tenemos la siguiente tabla de verdad.

$\neg$	p	$\wedge$	p
F	V	F	V
V	F	F	F

Lo dicho: es una contradicción.

Esto no es privativo de las religiones cristianas. En la Tanaj tenemos lo siguiente.

> “Entonces dijo Dios: Produzca la tierra seres vivientes según su género: ganados, reptiles y bestias de la tierra según su género. Y fue así.” (Génesis 1:24, op. cit.)

> “Creó, pues, Dios al hombre a imagen suya, a imagen de Dios lo creó; varón y hembra los creó.” (Génesis 1:27, op. cit.)

> “Y el Señor Dios formó de la tierra todo animal del campo y toda ave del cielo, y los trajo al hombre para ver cómo los llamaría; y como el hombre llamó a cada ser viviente, ése fue su nombre.” (Génesis 2:19, op. cit.)

En el Corán esto otro.

> “La Palabra de tu Señor es completamente cierta y justa. Nadie puede alterar la Palabra de Allah, Él es Omnioyente, Omnisciente.” (Alcorán, sura 6, aleya 115)

> “Cuando revelamos un precepto para abrogar otro, y Allah bien sabe lo que hace, dicen: Eres tú quien lo ha inventado. Pero la mayoría de ellos son ignorantes.” (Alcorán, sura 16, aleya 101.

Consideremos por último la visión de Tenzin Gyatso.

Carl Sagan: Quisiera hacer, si me lo permite, algunas preguntas sobre religión. ¿Qué pasaría si una doctrina religiosa –en este caso, el budismo tibetano– es contradicha por algún descubrimiento científico, qué haría un budista en este caso?

Dalai Lama: Para el budismo, esto no significa un problema. Buda aclaró que lo más importante estaba en el descubrimiento de cada uno. Debes conocer la realidad sin importar lo que digan la escrituras. En caso de una contradicción, debes confiar en el descubrimiento más que en las escrituras.

(Alejandro I. López, *El día en que se conocieron Carl Sagan y el Dalai Lama para hablar de las cosas importantes de la vida*, Cultura Colectiva, 30 de septiembre de 2016)

Ejemplo 11. La forma proposicional que obtuvimos relativa a la proposición de los aranceles para automóviles

$$p \vee q \vee r \to s$$

proviene de una contingencia.

A partir de este momento, por abuso de lenguaje, identificaremos a una proposición lógica con la forma proposicional que le corresponda.

Definición 5. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son proposiciones lógicas, entonces decimos que $\mathcal{B}$ es una *consecuencia lógica* de $\mathcal{A}$ (o que $\mathcal{A}$ *implica lógicamente* a $\mathcal{B}$) si cualquier asignación a las variables proposicionales que hacen verdadera a $\mathcal{A}$ también hacen verdadera a $\mathcal{B}$. Esto se denota con $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.

Ejemplo 12. "Özil fue más allá en sus declaraciones y reprochó su racismo al presidente de la Federación: 'A ojos de Grindel y sus patrocinadores, soy alemán cuando ganamos, pero un inmigrante cuando perdemos'" (Thomas Kline, *Opinión: La explosiva despedida de Özil*, Deutsche Welle, 23 de julio de 2018)

Tomando p: "Özil es alemán" y q: "Los futbolistas alemanes ganan", tenemos que la afirmación de Grindel y sus patrocinadores según Mesut Özil es

$$\mathcal{A} = (q \to p) \wedge (\neg q \to \neg p)$$

(considerando que no ser alemán es lo mismo que ser inmigrante y que no ganar es lo mismo que perder).

Afirmamos que la proposición lógica "Özil es inmigrante o los futbolistas alemanes ganaron" es una consecuencia lógica de la afirmación original del futbolista. Si la denotamos con $\mathcal{B}$, entonces tenemos que $\mathcal{B} = \neg p \vee q$. Obsérvese como $\mathcal{A}$ da verdadero en el primero y cuarto renglones, y lo mismo sucede con $\mathcal{B}$ (pues hemos ordenado igual las asignaciones), lo que comprueba que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.

$(q$	$\to$	$p)$	$\wedge$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$p)$	$\neg$	p	$\vee$	q
V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F

Definición 6. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son proposiciones lógicas, entonces decimos que $\mathcal{B}$ es *lógicamente equivalente* a $\mathcal{A}$ si cualquier asignación a las variables proposicionales hacen que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ devuelvan los mismos valores de verdad. Esto se denota con $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B}$.

Ejemplo 13. Retomando la proposición lógica de Grindel y sus patrocinadores, tenemos que la proposición lógica "Özil es alemán si, y sólo si, los futbolistas alemanes ganaron" corresponde a $\mathcal{C} = p \leftrightarrow q$, y le es lógicamente equivalente. Construyamos las tablas de verdad.

$(q$	$\to$	$p)$	$\wedge$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$p)$
V	V	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	V	F

p	$\leftrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

Vemos que las asignaciones que realizan ambas formas son idénticas, luego se cumple que $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{C}$.

El siguiente resultado mecaniza el realizar las comparaciones por filas de las tablas de verdad para verificar implicación o equivalencia lógica.

Proposición 1. *1. Se cumple que $\mathcal{A}$ implica lógicamente a $\mathcal{B}$ si, y sólo si, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una tautología.*

2. Se cumple que $\mathcal{A}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B}$ si, y sólo si, $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ es una tautología.

Demostración. 1. Supongamos que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. Entonces, al llenar la columna de $\rightarrow$ en la tabla de verdad de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nunca podemos poner F, pues para ello sería necesario que $\mathcal{A}$ fuera verdadero pero $\mathcal{B}$ falso, lo cual es imposible. Recíprocamente, si en la columna de $\rightarrow$ en la tabla de verdad de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ nunca pusimos F, es porque si $\mathcal{A}$ da V entonces también $\mathcal{B}$ da V, esto es, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.

2. Supongamos que $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B}$. Entonces, al llenar la columna de $\leftrightarrow$ en la tabla de verdad de $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, nunca podemos poner F, pues para ello sería necesario que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tuvieran distintos valores de verdad, lo cual es imposible. Recíprocamente, si en la columna de $\leftrightarrow$ en la tabla de verdad de $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ nunca pusimos F, es porque si $\mathcal{A}$ da V entonces también $\mathcal{B}$ da V y si $\mathcal{A}$ da F también lo hace $\mathcal{B}$, esto es, $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B}$. $\square$

Proposición 2. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son tautologías, entonces también $\mathcal{B}$ es una tautología.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ pudiera hacerse falso, entonces la única manera de preservar la tautologicidad de $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es que $\mathcal{A}$ se hiciera falsa (para poder poner V en la entrada correspondiente a $\to$). Pero se supone que $\mathcal{A}$ es una tautología, así que esto no puede hacerse. Entonces no hay manera de que $\mathcal{B}$ se haga falso, por lo tanto debe ser una tautología. □

Proposición 3. *Supongamos que a la forma proposicional $\mathcal{A}$ se le cambian sus variables por otras formas proposicionales para obtener $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{A}$ es tautología, entonces $\mathcal{B}$ también lo es.*

Ejemplo 14. Si en la tautología de Rajoy $\mathcal{A} = p \to p$ cambiamos a p por la forma $r \wedge s$, obtenemos $\mathcal{B} = (r \wedge s) \to (r \wedge s)$, que también es una tautología.

Ejercicio 1. Comprobar esto.

Definición 7. Una *teoría formal* $\mathcal{S}$ consiste en cuatro cosas.

1. Un conjunto de *símbolos* con los que se pueden construir *expresiones*.

2. Hay un conjunto de expresiones distinguidos que son las únicas admisibles, llamadas *fórmulas bien formadas* (fbf).

3. Hay un conjunto de fbf distinguido que consiste en los *axiomas* de $\mathcal{S}$.

4. Hay una cantidad finita $R_1, \ldots, R_n$ de relaciones entre las fbf, llamadas *reglas de inferencia*.

Las reglas de inferencia funcionan así: nos dan ciertas fbf $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ y otra aparte $\mathcal{B}$. Si podemos encontrar una relación R_j que diga que $\mathcal{B}$ se relaciona con las $\mathcal{A}_i$, entonces decimos que $\mathcal{B}$ *se sigue* de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ o que es una *consecuencia directa*.

Ejemplo 15. Los símbolos que nos han interesado hasta ahora son las letras latinas en minúscula, los paréntesis y los operadores lógicos. Con ellos hemos formado expresiones para capturar proposiciones lógicas. Las expresiones que efectivamente representan a proposiciones lógicas las hemos llamado formas proposicionales, y éstas son nuestras fbf. Más adelante diremos cuáles son los axiomas y las reglas de inferencia.

Definición 8. Una *demostración* en una teoría formal $\mathcal{S}$ es una sucesión de fbf

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$$

tal que para cada k se cumple que $\mathcal{A}_k$ es un axioma o es una consecuencia directa de todas las fbf anteriores. A la última fórmula $\mathcal{A}_n$ de una demostración se le llama *teorema*.

Consideremos un conjunto Γ de fbf y sea $\mathcal{B}$ una fbf en particular. Diremos que $\mathcal{B}$ es una *consecuencia* o *conclusión* de Γ si existe una sucesión $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ tal que cada $\mathcal{A}_i$ o bien

- es un axioma o bien
- está en Γ o bien
- es una consecuencia de las fbf que la anteceden,
- se cumple que la última fbf $\mathcal{A}_n$ es $\mathcal{B}$.

A Γ junto con $\mathcal{B}$ se le llama *argumento*.

A la sucesión se le llama *demostración de $\mathcal{B}$ a partir de* Γ y a los elementos de Γ se les llama *premisas* o *hipótesis* de la demostración. Denotamos esto con $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

Si Γ consiste en una cantidad finita de fbf, digamos, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, escribiremos simplemente

$$\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \vdash \mathcal{B}.$$

Si no hay hipótesis (lo que significa que $\mathcal{B}$ es un teorema) entonces escribimos solamente

$$\vdash \mathcal{B}.$$

Es momento de introducir el **cálculo proposicional** como una teoría formal. Ya dijimos quienes son sus símbolos, expresiones y fórmulas bien formadas. Faltan los axiomas que son de estas tres formas si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son fbf:

1. $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.
2. $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$.
3. $((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A})$

Sólo hay una regla, llamada *modus ponendo ponens* (MP),

La fbf $\mathcal{B}$ es consecuencia directa de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Otra forma de escribirlo es como sigue.

$$\frac{\begin{array}{l}\mathcal{A}\\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{B}}$$

Ejemplo 16. Examinemos una demostración para el teorema de Rajoy $p \to p$.

1. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$
   Axioma 2, sustituyendo $\mathcal{A} = \mathcal{C} = p, \mathcal{B} = (p \to p)$
2. $(p \to ((p \to p) \to p))$
   Axioma 1, sustituyendo $\mathcal{A} = p, \mathcal{B} = p \to p$
3. $((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$
   MP 1,2
4. $((p \to (p \to p)))$
   Axioma 1, sustituyendo $\mathcal{A} = \mathcal{B} = p$
5. $p \to p$
   MP 3,4

Teorema 1 (De deducción). *Si* Γ *es un conjunto de fbf y* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son fbf y ocurre que*

$$\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$$

entonces

$$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}).$$

No demostraremos este teorema, pero es la base del cómo los matemáticos demuestran afirmaciones de la forma "Si algo, entonces aquello", pues justifica que pueden usar como hipótesis el "algo".

Ejemplo 17. Usemos el teorema de deducción para verificar el argumento

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r$$

Para ello, basta con demostrar que $p \to q, q \to r, p \vdash r$.

1. $p \to q$
   Hipótesis
2. $q \to r$
   Hipótesis
3. p
   Hipótesis
4. q
   MP 1,3
5. r
   MP 2,4

Teorema 2. *Todo teorema del cálculo proposicional es una tautología.*

Demostración. Queda como ejercicio verificar que los axiomas son tautologías. Por una proposición anterior, vemos que el *modus ponens* preserva la tautologicidad; es decir, partiendo de tautologías arroja tautologías. □

Corolario 1. *El cálculo proposicional es* consistente, *es decir, no puede ser que las fbf $\mathcal{B}$ y $\neg\mathcal{B}$ sean ambas teoremas.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es teorema, entonces es una tautología. Pero entonces $\neg\mathcal{B}$ no es una tautología, por lo tanto no puede ser un teorema. $\square$

Teorema 3 (de completitud)**.** *Toda tautología del cálculo proposicional es un teorema.*

No demostraremos esto pero implica que tautologicidad es lo mismo que teoremicidad.

Escolio 1. El recíproco del teorema de deducción (y se le llama teorema de *resolución*) es cierto: si $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, entonces $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. En efecto, existe una demostración

$$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k, \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$

y podemos continuarla con $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, usando la hipótesis y el modus ponens. Así, existe una demostración de $\mathcal{B}$ a partir de Γ y $\mathcal{A}$, o sea $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, como queríamos.

Juntando esto con el hecho de que

$$(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \dashv\vdash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$$

y aplicándolo muchas veces, podemos ver que

$$\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \vdash \mathcal{B}$$

si, y sólo si,

$$(\mathcal{H}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{H}_n) \to \mathcal{B}$$

es una tautología.

Definición 9. Un argumento $\Gamma, \mathcal{B}$ es *válido* si su conclusión $\mathcal{B}$ es verdadera siempre que todas sus premisas Γ sean verdaderas.

Suponiendo que $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ son las hipótesis en Γ, es fácil ver ahora que un argumento es válido si, y sólo si

$$(\mathcal{H}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{H}_n) \to \mathcal{B}$$

es una tautología, y esto último es equivalente a que exista una demostración de $\mathcal{B}$ a partir de Γ.

Esto significa que, si podemos reducir un argumento coloquial a un argumento del cálculo proposicional, entonces podemos verificar que es válido por medio de una tabla de verdad o que podemos encontrarle una demostración a base de puro axioma y modus ponendo ponens.

Ejemplo 18. 1. “Si el gobierno no encuentra una mejor explicación en 90 días, [entonces el juez Bates] rescindirá el memorando gubernamental que terminó el programa [DACA] [...].” (María Sacchetti, *Federal judge: Trump administration must accept new DACA applications*, The Washington Post, 24 de abril de 2018).

2. Si el gobierno encuentra una mejor explicación en 90 días entonces el juez Bates no seguirá teniendo preocupaciones sobre el memorando.
3. El juez Bates sigue teniendo preocupaciones sobre el memorando. (Andrew Chung, *U.S. court orders Trump administration to fully reinstate DACA program*, Reuters, 3 de agosto de 2018)

---

4. El juez Bates rescindirá el memorando gubernamental que terminó el programa DACA.

Tomando

- p : “El gobierno encuentra una mejor explicación en 90 días”,
- q : “El juez Bates rescindirá el memorando gubernamental”,
- r : “El juez Bates sigue teniendo preocupaciones sobre el memorando”,

el argumento es

1. $\neg p \to q$
2. $p \to \neg r$
3. r

---

4. q

Verifiquemos con una tabla de verdad si es válido.

$(((\neg$	p	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\to$	$\neg$	$r))$	$\wedge$	$r)$	$\to$	q
F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F

No demostraremos la validez de este argumento utilizando exclusivamente los tres axiomas y el modus ponendo ponens (yo necesité 36 pasos para lograrlo).

En su lugar, utilizaremos varias equivalencias lógicas y otras reglas de inferencia que agilizan el proceso, en lo que se denomina *deducción natural*. Además, un argumento como

$$p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_{29} \to p_{30}, \neg p_{30} \vdash \neg p_1$$

se puede ver con deducción natural de inmediato que es válido, mientras que con tablas de verdad habría que llenar una con ¡más de mil millones de filas!

Equivalencia	Nombre	Abreviatura
$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{A}$	Idempotencia	Id
$\neg\neg\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{A}$	Doble negación	DN
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \dashv\vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \dashv\vdash \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	Conmutatividad	Conm
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \dashv\vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$ $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \dashv\vdash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	Asociatividad	Asoc
$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \dashv\vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$ $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \dashv\vdash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	Distributividad	Distr

Equivalencia	Nombre	Abreviatura
$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \dashv\vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \dashv\vdash \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	Leyes de de Morgan	LdM
$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \dashv\vdash \neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$	Contrapositiva	CP
$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \dashv\vdash \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	Equivalencia entre la implicación y la disyunción	EID
$\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \dashv\vdash \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	Negación de la implicación	NI

Regla de inferencia	Nombre	Abreviatura
$\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$	Adición	Ad
$\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{A}}$	Simplificación	Simp
$\dfrac{\begin{array}{l}\mathcal{A}\\ \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$	Conjunción	Conj
$\dfrac{\begin{array}{l}\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\\ \neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C}\end{array}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{C}}$	Resolución	Res

Regla de inferencia	Nombre	Abreviatura
$\dfrac{\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \quad \mathcal{A}}{\neg\mathcal{B}}$	Modus ponendo tollens	MPT
$\dfrac{\mathcal{A}\to\mathcal{B} \quad \neg\mathcal{B}}{\neg\mathcal{A}}$	Modus tollendo tollens	MTT
$\dfrac{\mathcal{A}\vee\mathcal{B} \quad \neg\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$	Modus tollendo ponens	MTP
$\dfrac{\mathcal{A}\to\mathcal{B} \quad \mathcal{B}\to\mathcal{C}}{\mathcal{A}\to\mathcal{C}}$	Silogismo hipotético	SH

Podemos ahora abordar la demostración del argumento del juez Bates.

1. $\neg p \to q$ Hip.
2. $p \to \neg r$ Hip.
3. r Hip.
4. $\neg\neg r \to \neg p$ CP 2
5. $r \to \neg p$ DN 4
6. $r \to q$ SH 1,5
7. q MP 3,6

Puede apreciarse que es mucho más sucinto que el cálculo de la tabla de verdad que realizamos anteriormente.

Para practicar.

Ejemplo 19. Luisito abre la caja de su nuevo avión de juguete y sale un papel que dice lo siguiente: "Si este avión puede volar a alturas mayores a 10 m y es el modelo 25, entonces se requieren cuatro pilas doble A. Pero si es el modelo 25, entonces el avión no puede volar a alturas mayores a 10 m a menos que no se requieran cuatro pilas doble A.". La caja dice que tiene un modelo 25, ¿podrá volar entonces a más de 10 m?

Un detalle con la definición de que una forma proposicional sea consecuencia de un conjunto Γ de hipótesis es que, si no es posible hacer una asignación de variables tal que todas las premisas sean verdaderas, ¡en automático el argumento es válido, pues $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es verdadero siempre que el antecedente $\mathcal{A}$ es falso!

Es por esto que tenemos que verificar que Γ sea *consistente* o *satisfactible*, esto es, que exista al menos una asignación de variables que haga a todas las hipótesis en Γ verdaderas.

Si bien es posible hacer esto con una tabla de verdad, si hay muchas variables pronto se ve que es impráctico. Otra posibilidad es demostrar que se puede obtener una contradicción como conclusión a partir de ellas.

Ejemplo 20. "El gobernador Jerry Brown debe permitir el flujo libre de vastas cantidades de agua provenientes del norte y que tontamente son desviadas hacia el Pacífico. Pueden usarse para los incendios, agricultura y todo lo demás. Pensemos en California plena de agua – ¡Muy bien! Lo aprobaría el gobierno federal de inmediato."

(Donald J. Trump, trino del 6 de agosto de 2018, 12:43 PM)

"Poco después de que el presidente Donald Trump aprobara la declaración de desastre en el estado de California dado que este último combate múltiples y grandes incendios forestales, culpó al gobernador demócrata de California por lo que, dijo, era una escasez de agua en el estado. [...] 'Tenemos suficiente agua para combatir los incendios,' dijo en un comunicado Scott McLean [oficial de información del Departamento de Silvicultura y Protección contra Incendios de California]."

(Stephanie Ebbs, *California fire officials say they have plenty of water to fight wildfires, despite Trump's tweet*, ABC News, 6 de agosto de 2018)

Definiendo

- p : “California desvía agua al Pacífico”,
- q : “Hay suficiente agua en California”,
- r : “Pueden apagarse los incendios forestales en California”,

tenemos la siguiente demostración.

1. $\neg p \to q$.
2. $q \to r$.
3. $\neg r$
4. q.
5. $\neg q$ MTT 2,3
6. $q \wedge \neg q$ Conj 4,5 **!**

"Cuando un líder miente constantemente, su objetivo no es hacerte creer algo; es hacerte creer lo que sea."

(Garry Kasparov, trino del 7 de agosto de 2018, 13:12)

Algo más que estamos en posición de justificar es la técnica de demostración por contradicción o *reductio ad absurdum*.

Teorema 4. *Si se puede concluir una contradicción a partir de un conjunto de premisas* Γ *y* $\neg\mathcal{B}$, *entonces* $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

Demostración. Tenemos que $\Gamma, \neg\mathcal{B} \vdash \neg(p \to p)$. Por el teorema de deducción, sabemos que

$$\Gamma \vdash \neg(\mathcal{B}) \to \neg(p \to p).$$

La conclusión en este último argumento es lógicamente equivalente (por contrapositiva y doble negación) a

$$(p \to p) \to \mathcal{B},$$

o sea

$$\Gamma \vdash (p \to p) \to \mathcal{B},$$

y por resolución concluimos que $\Gamma, (p \to p) \vdash \mathcal{B}$. Sin embargo, $(p \to p)$ es un teorema, así que podemos demostrarlo sin usar las hipótesis. Así, $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. □

Ejemplo 21. Podemos demostrar el argumento del juez Bates por contradicción. Recordemos que este es

$$\neg p \to q, p \to \neg r, r \vdash q.$$

La negación de la conclusión es $\neg q$, y la metemos como hipótesis. Procedemos como sigue.

1. $\neg p \to q$ Hip
2. $p \to \neg r$ Hip
3. r Hip
4. $\neg q$ Hip
5. p MTT 1,4
6. $\neg p$ MTT 2,3
7. $p \wedge \neg p$ Ad 5,6 **!**