



**POSTGRADO EN INGENIERIA MECATRÓNICA  
CONTROL DE ROBOTS**

**21200006**

**TAREA No. 4**

***"Modelado de la fricción"***

**F. HUGO RAMIREZ LEYVA**

**[ferminhugo.ramirez@upaep.mx](mailto:ferminhugo.ramirez@upaep.mx)**

**PUEBLA PUE. A 29 DE JUNIO DE 2006.**

## 1. Introducción

Los efectos de fricción en los sistemas mecánicos son fenómenos complicados que dependen de múltiples factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. Por tal motivo, tradicionalmente las fuerzas y pares de fricción son modelados de forma aproximada[1].

En los últimos años, se han ido desarrollando trabajos en esta área del conocimiento, ya que cualquier sistema mecánico que este en movimiento, se presenta este fenómeno. A la rama de la ciencia que estudia la fricción entre máquinas se le llama Tribología.

En el artículo [2], se propone una forma de modelar el efecto de la fricción, el cual es llamado modelo cinético/estático. Para el cual, la fuerza de fricción ( $f_f$ ) es función de la velocidad (figura 1(a)). En la figura 1(b) se muestra la grafica de la fricción dividida en zonas. La zona I, no hay movimiento. En la zona II se inicia el movimiento y la fuerza de fricción es constante. En la zona III disminuye la fricción a medida que aumenta la velocidad (pendiente negativa), el cual se llama efecto Stribeck. A las 3 regiones anteriores, caracteriza a la fricción a velocidades bajas, se le llama **fricción estática**. La zona IV es cuando ya se encuentra en movimiento, en la cual hay una relación lineal entre la velocidad y la fuerza de fricción.

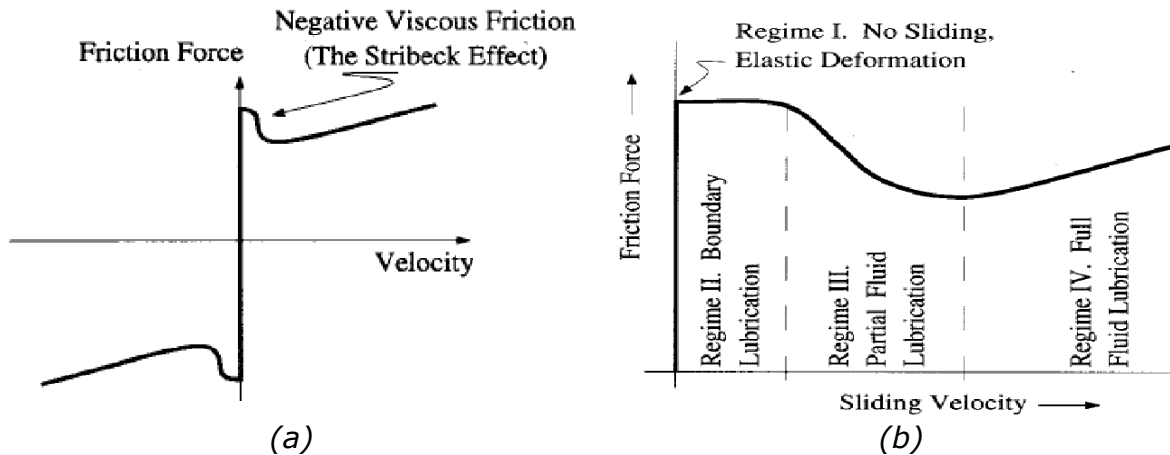


Figura 1(a) Modelo de la fricción. (b) Regiones de la fricción

La ecuación 1, representa la ecuación matemática que modela el efecto de la fricción. Como se puede ver es función de la velocidad.

$$f_f(\tau, \dot{q}) = b\dot{q} + f_c \text{signo}(\dot{q}) + f_e \quad (1)$$

Donde, **b** es el coeficiente de fricción viscosa, **fc** es coeficiente de fricción de Coulomb y **fe** es el coeficiente de fricción estática. La forma más simple de modelar a  $f_e$ , es mediante una zona de histieresis, la cual esta dada por la

ecuación (2). Sin embargo esta función no reproduce el efecto Stribeck. El cual en algunas publicaciones lo modelan por una ecuación diferencial de 2° grado.

$$f_e = f_{e0} |1 - \text{signo}(\dot{q})| \quad (2)$$

Un robot Rotradi I, se va a usar su último eslabón como péndulo, para caracterizarlo su respuesta ante la fricción. Esta formado por un eslabón de aluminio y el motor de transmisión directa Modelo **DM1015B60** de la firma Parker Automation. Los datos del eslabón se dan en la tabla 1[2]. La ecuación (3) representa el modelo matemático del péndulo. Donde  $\ddot{q}$  es la aceleración,  $\dot{q}$  la velocidad y  $q$  la posición. Sí de la ecuación (3) se despeja  $f_f$ , la fricción en función de los demás parámetros queda representada en la ecuación (4).

$$\tau = I\ddot{q} + b\dot{q} + mgl_c \sin(q) + f_f \quad (3)$$

$$f_f = \tau - I\ddot{q} - b\dot{q} - mgl_c \sin(q) \quad (4)$$

**Tabla 1. Parámetros del péndulo**

Parámetro	Notación	Valor	Unidad
Longitud de eslabón	$l$	0.45	m
Masa del eslabón	$m$	3.880	Kg
Centro de masa del eslabón	$lc$	0.048	m
Momento de Inercia	$I$	0.093	Kg m <sup>2</sup>
Coefficiente de viscosidad	$b$	0.175	Nm-seg
Coefficiente de Coulomb	$fc$	1.734	Nm
Aceleración de la gravedad	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

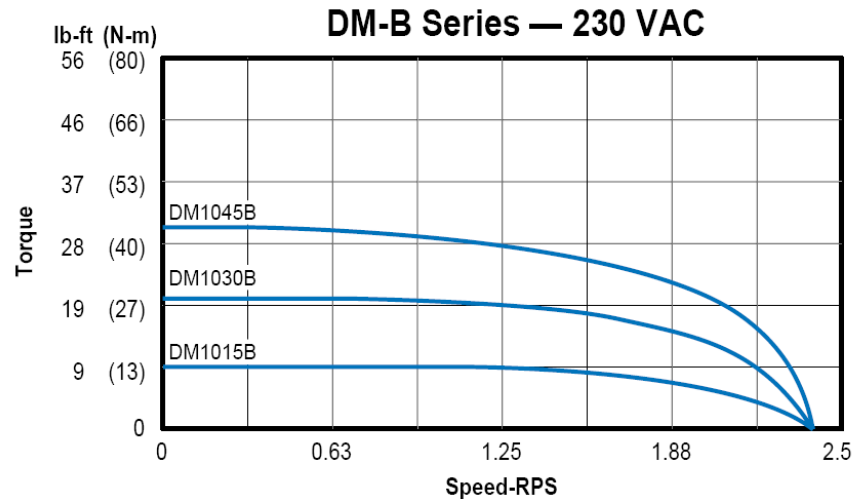
Si se conocen los parámetros del sistema y el torque que se aplica. Al graficar  $f_f$  vs. La velocidad, se obtiene la respuesta de la fricción del sistema.

Los motores de transmisión directa como el DM1015B6, que se venden como servos, tienen la característica de que genera un par que es proporcional a la señal de voltaje de control. Esto es muy importante, porque para un motor de DC acoplados a engranes, la relación entre el torque y la señal de control que se le aplica es no lineal, lo que hace muy difícil el obtener un modelo matemático adecuado. También poseen bajas perdidas y una eficiencia mayor.

En la tabla 2 se muestran un resumen de las características del motor DM1015B6 y la figura 2 una grafica de la respuesta del par vs. la velocidad. De esta figura se concluye que mientras la velocidad sea menor 1.5 rev/seg, el par máximo que puede entregar es de 9Nm.

Con el desarrollo de esta tarea se pretende proponer una metodología para la caracterización experimental de la fricción de un sistema mecánico, y en

particular del péndulo. La comprobación experimental se hará con el robot Rotradi I que se encuentra en el laboratorio de Robótica de la BUAP.



*Figura 2. Curvas características de velocidad (revoluciones por segundo) vs torque de los motores de la serie DM1XXXB*

**Tabla 2. Características de los motores de la serie DM1XXXB**

DM Series – Motor Data		Model 1015B	Model 1030B	Model 1045B	Model 1050A	Model 1100A	Model 1150A	Model 1200A
Peak torque	ft-lbs (Nm)	11 (15)	22 (30)	33 (45)	37 (50)	74 (100)	111 (150)	148 (200)
Rated speed • rps	115VAC	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5
	230VAC	2.0	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Rotor inertia	oz-in <sup>2</sup> x 10 <sup>2</sup>	6.6	8.2	10.4	52.5	65.1	77.6	91.3
	(Kgm <sup>2</sup> ) x 10 <sup>-3</sup>	(12)	(15)	(19)	(96)	(119)	(142)	(167)
Maximum steps/rev		655,360	655,360	655,360	1,024,000	1,024,000	1,024,000	1,024,000
Motor weight*	lbs	12	17	21	32	42	53	64
	(kg)	(5.5)	(7.5)	(9.5)	(14.5)	(19)	(24)	(29)
Maximum static axial load** • Compression • Tension	lbs	6,600	6,600	6,600	8,800	8,800	8,800	8,800
	lbs	2,200	2,200	2,200	4,400	4,400	4,400	4,400
Max. static overhung load**		148	148	148	296	296	296	296
Max. power consumption	KVA	1.6	2.0	2.0	2.4	2.7	3.0	3.0

## 2. Metodología

Como lo que se pretende es obtener la respuesta de la fricción contra la velocidad, es necesario tener una estimación de todas las fuerzas que actúan sobre él, tanto el par que produce el motor, como la inercia, y el par gravitacional. Por lo tanto, la metodología que se propone para la caracterización de la fricción de un sistema mecánico es:

1. Caracterización de los parámetros físicos del sistema, ya sea por medición directa o por alguna otra técnica, como son: Centro de masa, momento de inercia, masa, longitud, par gravitacional.

2. Montar el sistema y tener la capacidad de medir posición, velocidad y torque aplicado a una frecuencia de muestreo "suficiente" para no perder información del sistema.
3. Aplicar una señal de prueba que permita obtener una medición de la variación de la posición y velocidad en función del torque que se aplique. Es necesario que se tengan variaciones positivas y negativas del torque.
4. Captura de los datos, y en un post procesamiento, obtener la velocidad y aceleración.
5. Usando la ecuación (4) obtener la fuerza de fricción, y graficar ésta contra la velocidad medida.
6. De esta grafica, identificar las 4 regiones en la cuales se divide la fricción, y a partir de ellas encontrar  $f_c$  y  $b$ , y la región Stribeck.
7. Hacer un ajuste de las curvas o muchas pruebas para obtener un promedio estadístico de los diferentes parámetros.

### 3. Caracterización

Para caracterizar al sistema, se decidió usar una señal de torque que respondiera en forma de rampa, con compensación de gravedad. La compensación de gravedad ya viene implementada en el sistema. Para evitar que se saturara el motor, se usó la función tangente hiperbólica. La ecuación (5) y (6) corresponden al torque positivo y negativo que se aplicó. La información que se grabó fue la posición, velocidad y torque.

$$\tau = 1.9 \tanh(0.5t) + \text{comp\_gravedad}(q) \quad (5)$$

$$\tau = -1.9 \tanh(0.5t) + \text{comp\_gravedad}(q) \quad (6)$$

En la figura 3(a) se muestra la respuesta del torque aplicado al péndulo vs el tiempo. En ella se puede apreciar que el torque máximo es de 4Nm, el cual es muy inferior al máximo del motor (9Nm). Como se puede apreciar, inicialmente el torque tiene una respuesta lineal con respecto al tiempo, pero después de cierto tiempo presentan variaciones. Para obtener estas mediciones se hicieron en 2 partes, primero se aplicó el torque positivo, y después el torque negativo.

En la figura 3(b) se muestra la respuesta de la velocidad del péndulo vs tiempo. Las unidades de la velocidad son en rad/seg. Como se puede apreciar en esta figura, la máxima velocidad es menor a  $\pm 3$  rad/seg, el cual es menor a 1 rev/seg, que de la figura 2, se ve que el motor usado mantiene el par constante cuando la velocidad es menor a 1.5 rad/seg. Por lo cual se puede suponer que éste opera en su región lineal.

En la figura 4(a) se muestra la grafica del momento de inercia (el cual es el producto de la aceleración por  $I$ ). La figura 4(b) corresponde a la fuerza de fricción que experimenta el péndulo, la cual corresponde a los términos dados

en la ecuación (4). Como se puede ver de la figura 4(b), la fricción esta acotada a un valor entre  $\pm 4\text{Nm}$ .

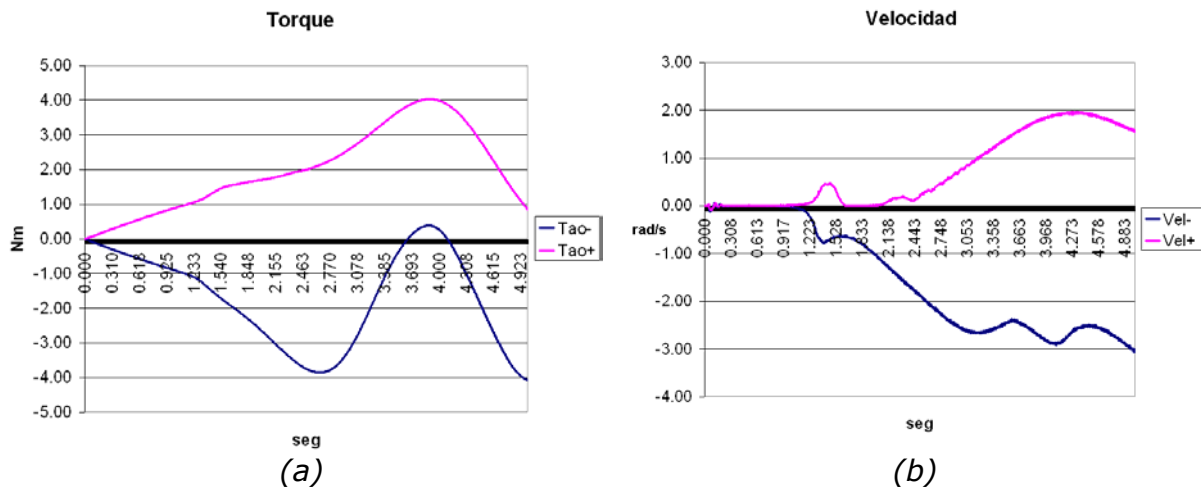


Figura 3(a) Grafica del torque suministrado por el motor. (b) Respuesta de la velocidad

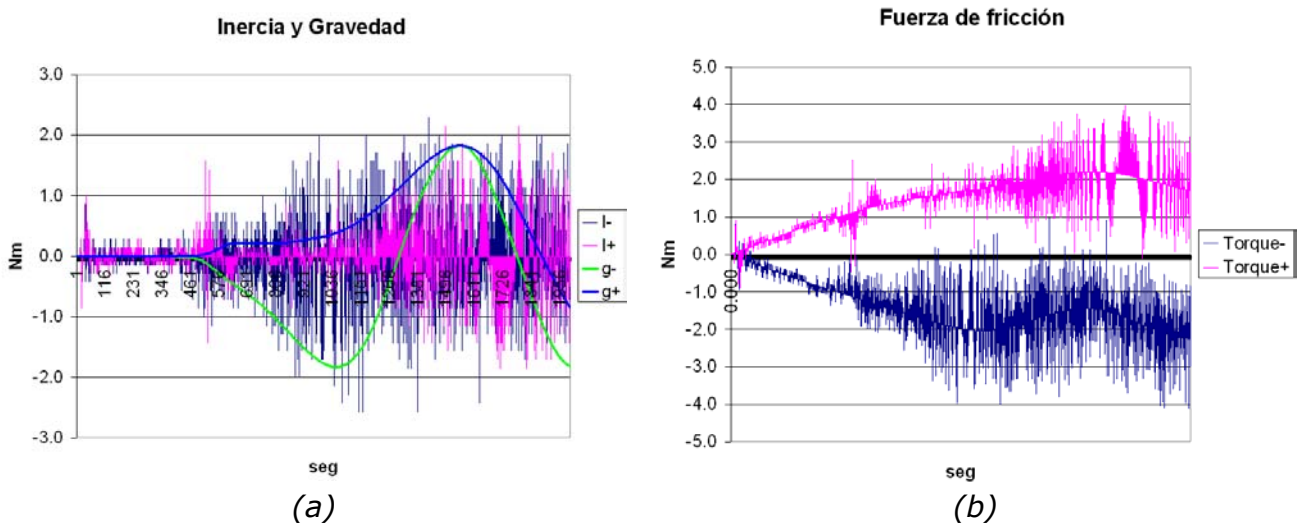
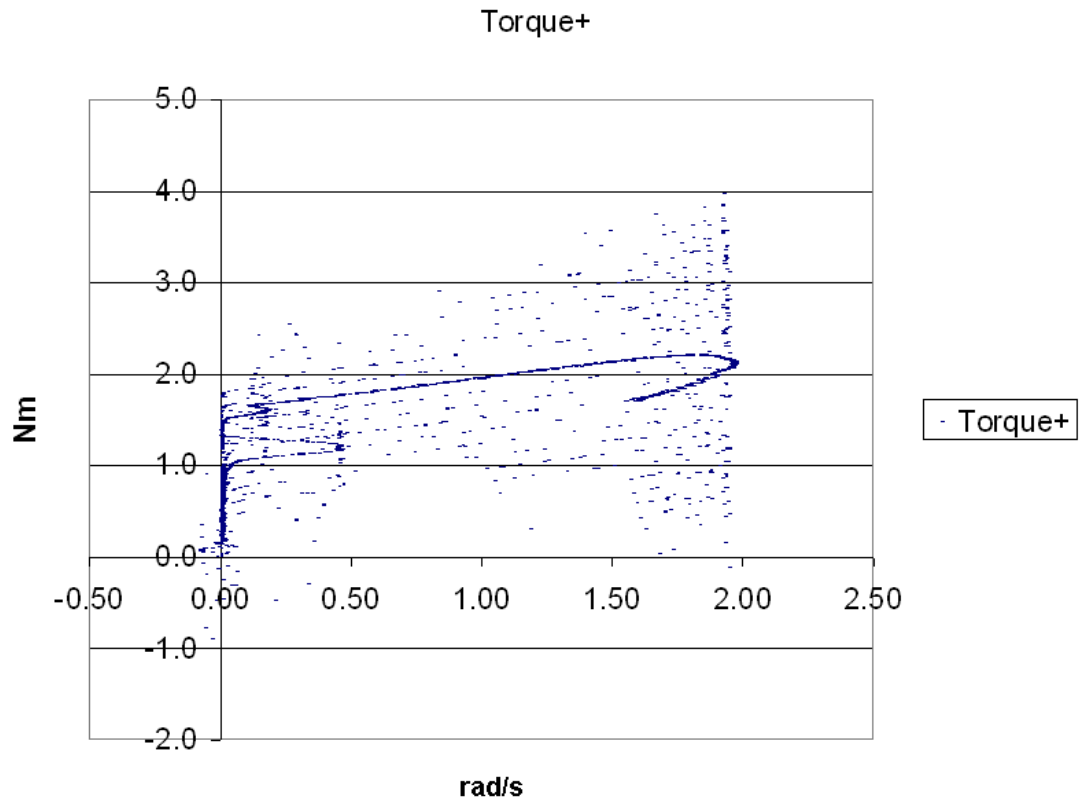
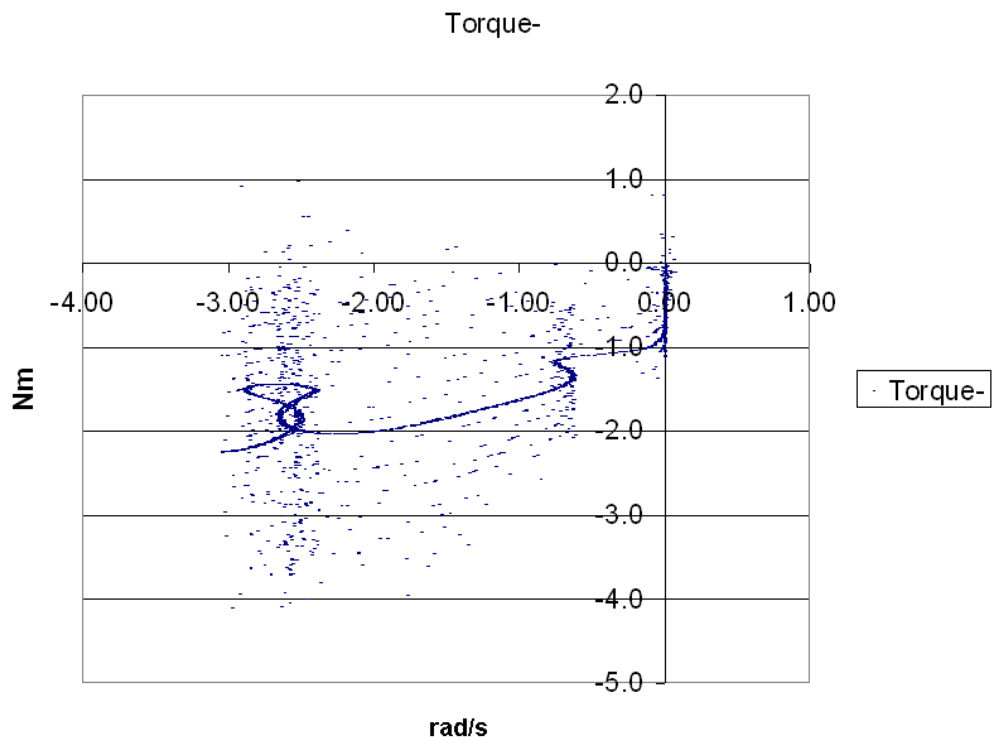


Figura 4(a) Grafica de la inercia y el par gravitacional para un torque positivo y negativo. (b) Suma de todas las fuerza que interviene en el péndulo(ff)

En la figura 5 y 6 se muestra la grafica de la fuerza de fricción vs la velocidad, cuando el torque aplicado es positivo y negativo respectivamente. Como se puede ver, ambas graficas presenta una tendencia a ciertas líneas rectas, con una gran dispersión de puntos. Para mejorar esto, valdría la pena hacer un ajuste a mínimos cuadrados.



*Figura 5. Respuesta de la ff vs velocidad par ff positivo*



*Figura 6. Respuesta de la ff vs velocidad para ff negativa*

En la región en la que se tiene una mejor respuesta al efecto Stribeck, es para la fuerza negativa. Aunque no se tiene una correspondencia muy exacta a la que presupone el modelo de la figura 1, se observa que el comportamiento medido tiene cierta correspondencia a lo que predice la práctica.

#### 4. Resultados

Una vez que se obtuvieron los datos experimentales se procedió a obtener los términos con los que se modela la fricción. En la tabla 2 se muestran los datos de los diferentes términos con los cuales se modela la fricción.

La fricción estática  $f_{eo}$ , es el par necesario para que empiece a haber movimiento. Este valor se obtuvo de forma visual, siendo +1.5 y -1.1 Nm. Para obtener el valor del coeficiente de fricción de Coulomb y viscosa, por inspección visual se tomó el valor a partir del cual se ve una línea recta, y sobre esta línea, se tomó un punto para obtener la pendiente. Los puntos que se obtuvieron son:

Velocidad	Par	Pendiente
-0.64	-1.4	
-1.23	-1.7	0.51
0.2	1.7	
1.19	2	0.30

**Tabla 2. Parámetros del péndulo**

Parámetro	Notación	Publicado	Medido	Unidad
Coefficiente de viscosidad	$b+$	0.175	0.30	Nm-seg
Coefficiente de viscosidad	$b-$	0.175	0.51	Nm-seg
Coefficiente de Coulomb	$f_{c+}$	1.734	1.7	Nm
Coefficiente de Coulomb	$f_{c-}$	-	-1.4	Nm
Coefficiente de fricción estática	$f_{eo+}$	--	+1.5	Nm
Coefficiente de fricción estática	$f_{eo-}$	--	-1.1	Nm

#### 5. Conclusiones

Con el desarrollo de esta práctica se comprobó de forma experimental el modelo de fricción y se hizo una propuesta de la metodología necesaria para obtener los términos de este modelo.

Haciendo una comparación de los datos publicados para el péndulo contra los obtenidos, se puede ver que son cercanos. Si bien no se hicieron muchas mediciones para corroborar o tener una mayor cantidad de datos para hacer un promedio estadístico, con lo que aquí se obtuvo muestra que la metodología puede ser correcta.

Por falta de tiempo no se pudieron hacer mas pruebas, pero en un futuro, valdría la pena trabajar mas sobre este sistema para tener resultados más confiables y hacer una comprobación experimental, de que estos son correctos.



## 7. Bibliografía

- [1] Rafael Kelly, Víctor Santibáñez; " Control de Movimiento de Robots Manipuladores"; Pearson Prentice Hall; 2003, ISBN 84-205-3831-0
- [2] Armstrong-Hélouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C; "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction"; **Automatica (Journal of IFAC)**; Volume 30 , Issue 7 (July 1994); Pages: 1083 - 1138
- [3] Fernando Reyes, Rafael Kelly; "Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm; Mechatronics; Pages 267-282; 2001.
- [4] Parker Automation, Catalog 8000-4/USA Dynaserv Series, [http://www.parkermotion.com/catalog\\_2002/pgs153\\_186\\_dynaserv.pdf](http://www.parkermotion.com/catalog_2002/pgs153_186_dynaserv.pdf)