Robótica
4. Control de robots

F. Hugo Ramírez Leyva

Cubículo 3

Instituto de Electrónica y Mecatrónica

hugo@mixteco.utm.mx

Marzo 2012

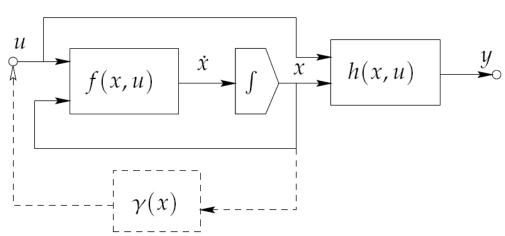
Representación en Variables de estado

- Un sistema dinámico no lineal se representa de la siguiente forma, donde **XεRn** son los vectores de estado y **u εRm** las entradas de control. A veces la salida y(t) también tiene

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

- Si f no depende explícitamente del tiempo que dice que el sistema es autónomo.



Punto de Equilibrio

- **Un** punto de equilibrio (PE) del sistema si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x, el estado permanece en x en todo tiempo futuro.
- Un PE puede ser aislado, es decir no tiene otros PE en la vecindad, o puede existir un continuo de PE.
- Para un sistema Lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- El punto de equilibrio es X=0 si u=0.

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = u(t)$$

$$x_1 = y$$

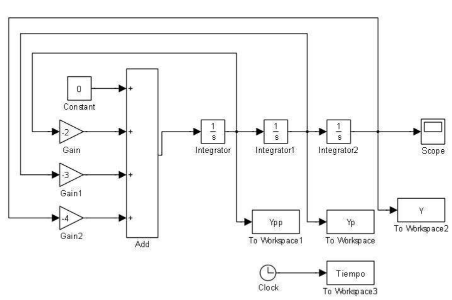
$$x_2 = \dot{y}$$

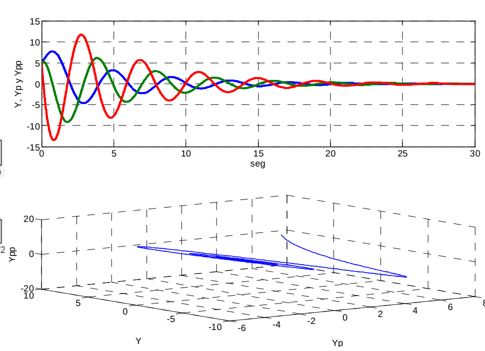
$$x_3 = \ddot{y}$$

$$\dddot{y} = u(t) - 2x_3 - 3x_2 - 4x_1$$

Ejemplo Sistema $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = u(t)$

- Simulación con condiciones iníciales y(0)=yp(0)=ypp(0)=5

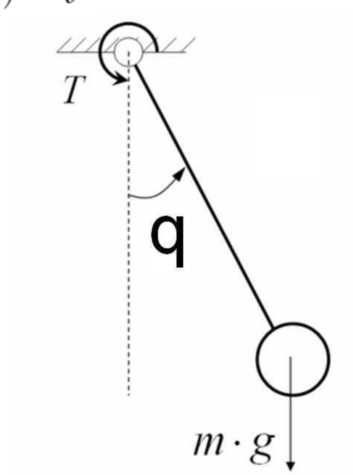




C:\PCUTM2010\UTM_10\Cursos\2012 Marzo-Julio\Robótica\Matlab\simulink\modelos\noLineales

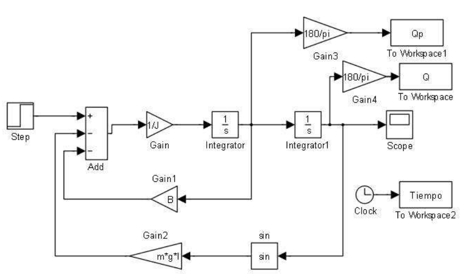
Ejemplo 1. PE del Péndulo

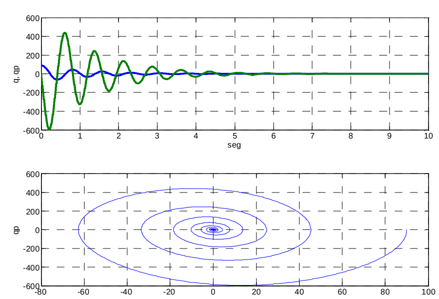
$$\tau = \left[ml^2 + I\right]\ddot{q} + mgl_{c1}\sin\left(q\right) + f$$



Ejemplo 1. PE del Péndulo

- Simulación con entrada cero y condiciones iníciales q1(0)=pi/2 y q1p(0)=0, Ts=1ms.
- l=0.45; lc=0.091; m=24; g=9.81; I=1.266; B=2.288; tao=0; fc=7.17; J=m*lc*lc+I; Ts=0.001





C:\PCUTM2010\UTM_10\Cursos\2012 Marzo-Julio\Robótica\Matlab\simulink\modelos\noLineales

Código de Matlab

```
%Inicialización del archivo de simulink
l=0.45;
lc=0.091;
m=24;
g=9.81
I=1.266
B=2.288
tao=1
fc=7.17
J=m*lc*lc+I
Ts=0.001
 subplot(2,1,1),plot(Tiempo,Q,Tiempo, Qp)
ylabel 'Y,Yp yYpp'
xlabel 'seg'
grid
subplot(2,1,2),plot(Q, Qp)
ylabel 'Y'
xlabel 'Yp'
zlabel 'Ypp'
grid
```

Problemas

- Representar al sistema del tipo $\dot{x} = f(x,u)$, y encontrar el PE
- Problema 1

$$\dot{x}_1 = \varepsilon[x_1 - \varepsilon] + x_2 - [x_1 - \varepsilon]\left[[x_1 - \varepsilon]^2 + x_2^2\right], \qquad x_1(0) \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_2 = -[x_1 - \varepsilon] + \varepsilon x_2 - x_2\left[[x_1 - \varepsilon]^2 + x_2^2\right], \qquad x_2(0) \in \mathbb{R}$$

- Problema 2

$$\ddot{y} + [y^2 - 1]\dot{y} + y^2 + 1 = 0, \qquad y(0), \dot{y}(0) \in \mathbb{R}$$

- Problema 3

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3$$

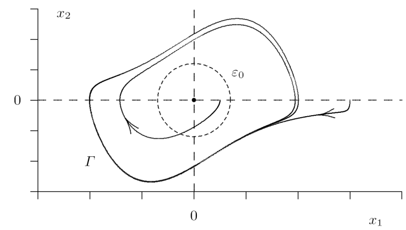
Oscilador de Van der Pool

- Ejemplo de un sistema no lineal sin entradas
- Las variables de estado son x1 y x2

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2$$

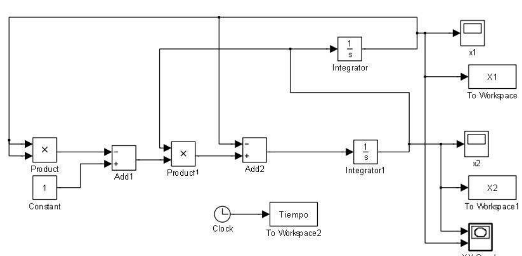
- El sistema es estable si

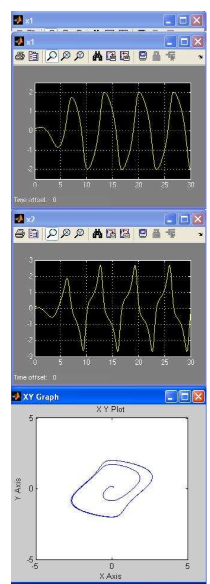
$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \implies \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon_0 \qquad \forall\, t \geq 0.$$



Simulación en Matlab

- Condiciones iniciales x1(0)=x2(0)=0.1





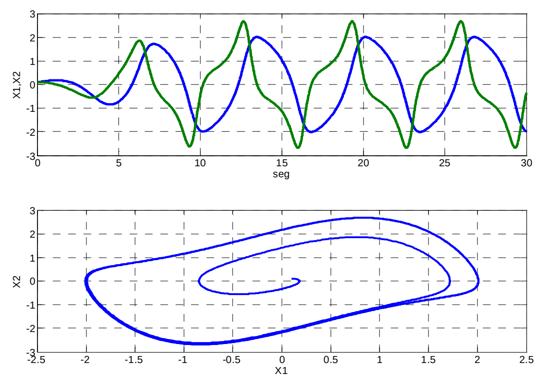
C:\PCUTM2010\UTM_10\Cursos\2012 Marzo-Julio\Robótica\Matlab\simulink\modelos\VanderPol

Simulación en Matlab

Condigo de incialización

```
Ts=0.01;
subplot(2,1,1),plot(Tiempo
   ,X1,Tiempo, X2)
ylabel 'X1,X2'
xlabel 'seg'
grid
subplot(2,1,2),plot(X1,X2)
ylabel 'X2'
xlabel 'X1'
grid
```

Gráficas en Matlab



Sistemas Lineales

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}u$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX}$$

- Un sistema lineal es estable si y solo si sus Eigen valores (Valores propios) son números complejos menores o iguales a cero. .
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = -0.3723 \\ \lambda_2 = 5.3723 \end{cases}$$

- !El sistema es inestable!
- Nota: En Matlab se obtienen los eigen valores con la instrucción: eig(A)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Sistemas Lineales

- Los puntos de equilibrio de: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$
- son estables $\Leftrightarrow$ todos los eigenvalores de A, satisfacen que $\mathbb{R}e\ \lambda_i \leq 0$
- Linealización de un sistema no lineal
  - La ecuación diferencial no lineal dada por $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ se puede aproximar por series de Taylor a

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{X_0}, \mathbf{r_0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{r})\bigg|_{x_0, r_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial r_j}(\mathbf{X}, \mathbf{r})\bigg|_{x_0, r_0} (r_j - r_{0j})$$

- con i=1,2 y 3

Linealización

- Si se define $\Delta x_i = x_i - x_{oi}$ y $\Delta r_j = r_j - r_{oj}$
- La ecuación diferencial se puede aproximar a:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}^* \Delta \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \frac{\delta f_n}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta r_1} & \frac{\delta f_1}{\delta r_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta r_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta r_1} & \frac{\delta f_2}{\delta r_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta r_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta r_1} & \frac{\delta f_n}{\delta r_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta r_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

- Oscilador de Van Der Pool

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \left(1 - x_1^2\right)x_2$$

$$\dot{\mathbf{X}} = f\left(\mathbf{X}\right) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

- El punto de equilibrio es **0**

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\Delta\mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}^* = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2x_1x_2 & 1-x_1^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

- Linealización del péndulo

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin\left(x_1\right) - bx_2$$

$$\dot{\mathbf{X}} = f\left(\mathbf{X}\right) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

- El punto de equilibrio es $x_1 = 0,\ \pi,\ \bullet\bullet\bullet,\ \mathrm{n}\pi$

$$x_2 = 0$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos\left(x_1\right) & -b \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Propiedades de Matrices

A matrix A is *square* if $n = m$, *i.e.* if it has as many rows as columns. A square matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *symmetric* if it is equal to its transpose that is, if $A = A^T$. A is *skew-symmetric* if $A = -A^T$. By $-A$ we obviously mean $-A := \{-a_{ij}\}$. The following property of skew-symmetric matrices is particularly useful in robot control:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0, \quad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

A square matrix $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *diagonal* if $a_{ij} = 0$ for all $i \neq j$. We denote a diagonal matrix by $\operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *i.e.*

$$\operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Definido Positivo

A square matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singular* if its determinant is zero that is, if $\det[A]{=}0$. In the opposite case it is *nonsingular*. The inverse matrix A^{-1} exists if and only if A is nonsingular.

A square *not necessarily* symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, is said to be *positive definite* if

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0, \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ with } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n.$$

The theorem of Sylvester establishes that the matrix P is positive definite if and only if

$$\det[a_{11}] > 0, \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \cdots, \det[A] > 0.$$

- Encontrar si las matrices son definidas positivas

$$V(x_1, x_2) = [\,x_1 \quad x_2\,] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo2

$$P(x) = \begin{bmatrix} k & -\dfrac{\varepsilon}{1+2x^2} \\ -\dfrac{\varepsilon}{1+2x^2} & 1 \end{bmatrix}$$

Control de robots en el espacio articular

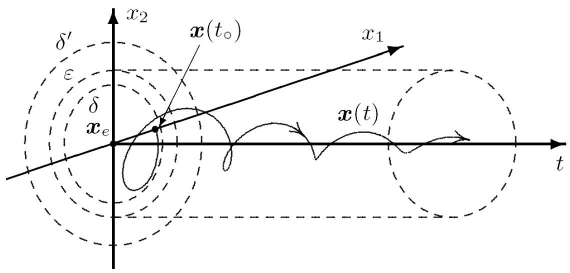
- El estado de equilibrio X=0, se dice que es un punto estable si para cualquier R>0 existe un r>0 tal que si $\|\mathbf{X}(t)\| < R \;\; \forall$ t. En otro caso es inestable.
- Estabilidad asintótica
  - Un punto de equilibrio 0 es asintóticamente estable si él es estable, y además existe un r>0 tal que si $\|\mathbf{X}(0)\| < r$ implica que $\mathbf{X}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$
- Estabilidad Exponencial
  - Un punto de equilibrio 0 es exponencialmente estable, si existe 2 puntos estrictamente positivos α y λ tal que,

$$\forall\; t > 0,\; \|\mathbf{X}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{X}(0)\| e^{-\lambda t}$$

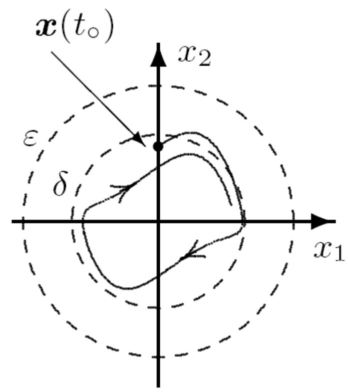
- Estabilidad marginal

Control de robots en el espacio articular

Estabilidad asintótica



Estabilidad Marginal



Estabilidad en el sentido de Lyapunov

- Existen 2 métodos
  - 1er método, para sistemas lineales
  - 2° método para sistemas no lineales autónomos
- Función definida positiva localmente.
  - Una función continua $V:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva localmente, si:
    - $V(0)=0$
    - $V(x)>0$ para todo x≠0, pero con || x || pequeña
-
- Función definida positiva globalmente.
  - Una función continua $V:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva globalmente, si:
    - $V(0)=0$
    - $V(x)>0$ para todo x≠0,
- Función Radialmente desacotada
  - Una función continua $V:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función radialmente desacotada si $V(x)\rightarrow\infty$ cuando $\|x\|\rightarrow\infty$

Función candidata de Lyapunov

- Una función $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función candidata de Lyapunov par el equilibrio $x=0\in\mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{X}}=f(t,x)$ si:
  - $V(t,x)$ es una función definida positiva
  - $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y x
  - $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a t y x

Función candidata de Lyapunov

- Derivada con respecto a t de la función candidata de Lyapunov

$$\dot{V}(t,x)=\frac{d}{dt}V(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}^T\frac{dx}{dt}=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}^T f(t,x)$$

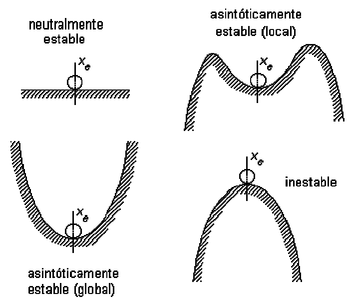
- Si no se tiene dependencia explicita del tiempo, queda

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}^T f(t,x)$$

- El origen $x=0\in\mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de $\dot{x}=f(t,x)$ si existe una función candidata de Lyapunov $V(t,x)$, tal que su derivada temporal satisfaga:
- $\dot{V}(t,x)\leq 0\ \ \forall t\geq 0$, en un rango pequeño de $\|x\|$, se dice que es estable localmente.

Función candidata de Lyapunov

- $\dot{V}(t,x) < 0 \ \ \forall t \geq 0 \text{ y } x \neq 0$ el punto de equilibrio tiene estabilidad asintótica global



Teorema de LaSalle

- Sea la ecuación diferencial autónoma: $\dot{x} = f(x)$
- Cuyo origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ definida positiva (globalmente) y Radialmente desacotada, tal que: $\dot{V}(t,x) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Defínase el conjunto $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0 \right\}$
- Si $x(0) = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual t≥0, entonces el origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable en forma global.

Ejemplo

- Sea el sistema lineal de primer orden $\dot{X} = -aX$, la solución a este sistema es: $x(t) = x(0)e^{-at}$

$$\text{Si: } \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{ Es estable} \\ a < 0 \Rightarrow \text{ Es inestable} \end{cases} \quad \text{El punto de equilibrio es X=0.}$$

- La función candidata de Lyapunov es $V(X) = \frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \geq 0$ además

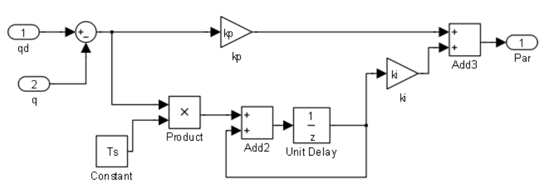
$$V(x) > 0 \text{ si } x \neq 0$$

$$V(x) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad x \to \pm\infty \quad \text{Radialmente desacotada}$$

$$\dot{V}(X) = x\dot{x} = x(-a)x = -ax^2 < 0 \;\; \text{Definida negativa}$$

Control PI para el péndulo

Control PI Discreto

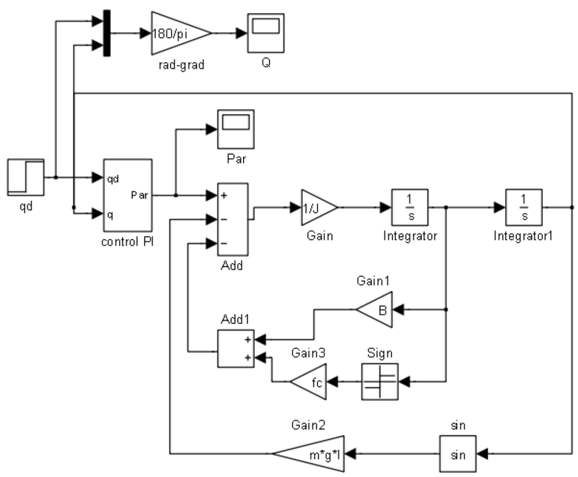


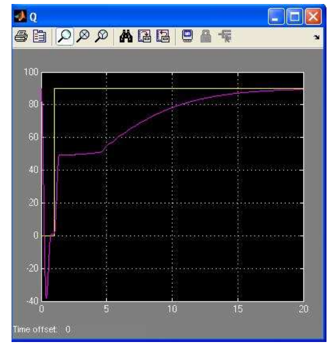
Archivo de Inicialización ParametrosPendulo.m

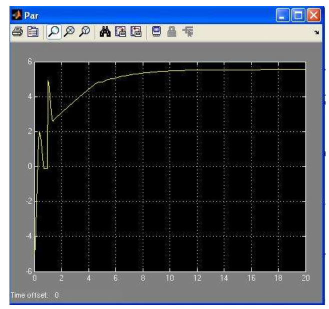
- %Parámetros del Péndulo y controlador PI
- clear; close
- m=3.88
- g=9.81
- l=0.1
- B=0.175
- J=0.093
- fc=1.734
- Ts=1e-3
- %Controlador PI
- qd=90*pi/180;
- taoMax=5
- kp=taoMax/qd
- ki=1

C:\PCUTM2010\UTM_10\Cursos\2012 Marzo-Julio\Robótica\Apuntes\Presentaciones\matlab\simulink

Control PI para el péndulo





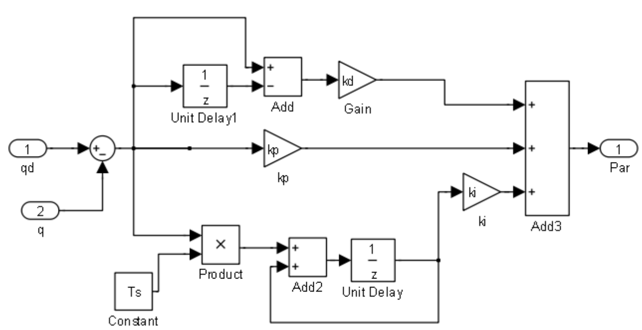


Control PI para el péndulo

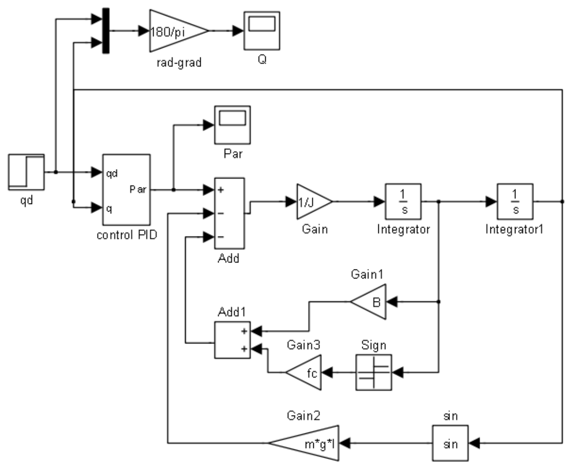
Archivo de Inicialización ParametrosPendulo.m

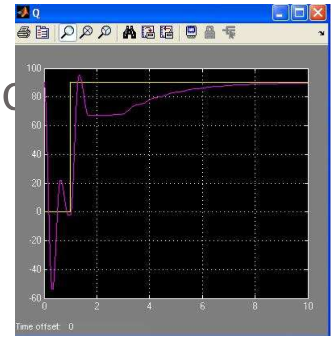
- %Parámetros del Péndulo y controlador PID
- clear; close
- m=3.88
- g=9.81
- l=0.1
- B=0.175
- J=0.093
- fc=1.734
- Ts=1e-3
- taoMax=5
- %Controlador PID
- kp=taoMax/qd
- kd=0.3*kp
- ki=4

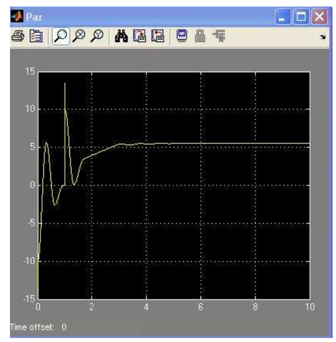
Control PID Discreto



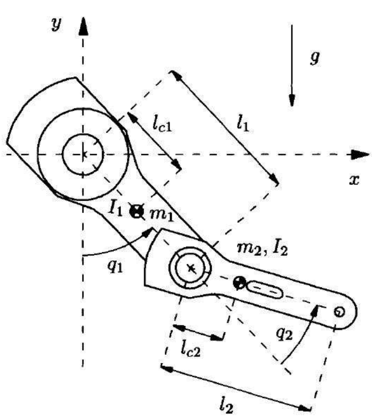
Control PI para el péndulo







Control PI para el R de 2gdl



Parámetro	Notación	Valor	Unidad
Longitud de eslabón 1	l_1	0.45	m
Longitud de eslabón 2	l_2	0.45	m
Masa del eslabón 1	m_1	23.902	Kg
Masa del eslabón 2	m_2	3.880	Kg
Centro de masa del eslabón 1	lc_1	0.091	m
Centro de masa del eslabón 2	lc_2	0.048	m
Momento de Inercia 1	I_1	1.266	Kg m^2
Momento de Inercia 2	I_2	0.093	Kg m^2
Coeficiente de viscosidad 1	b_1	2.288	Nm-seg
Coeficiente de viscosidad 2	b_2	0.175	Nm-seg
Coeficiente de Coulomb 1	fc_1	7.17 si $\dot{q}_1 > 0$ y 8.049 si $\dot{q}_1 < 0$	Nm
Coeficiente de Coulomb 2	fc_2	1.734	Nm
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s^2
Torque de la articulación 1	τ_1	150	Nm
Torque de la articulación 2	τ_2	15	Nm

Control PI para el R de 2gdl

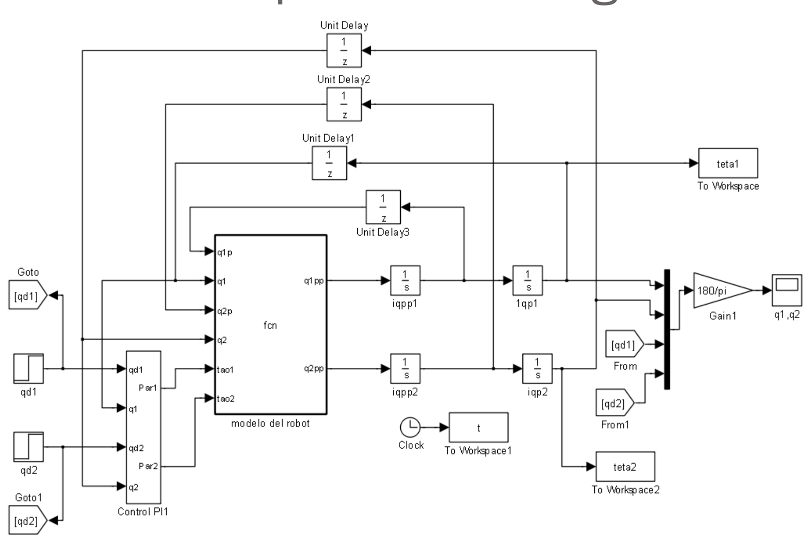
- Para un robot de 2 grado el modelo es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(\boldsymbol{q}) & M_{12}(\boldsymbol{q}) \\ M_{21}(\boldsymbol{q}) & M_{22}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}}_{M(\boldsymbol{q})} \ddot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) & C_{12}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ C_{21}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) & C_{22}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix}}_{C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})} \dot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{q}) \\ g_2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})} = \boldsymbol{\tau}$$

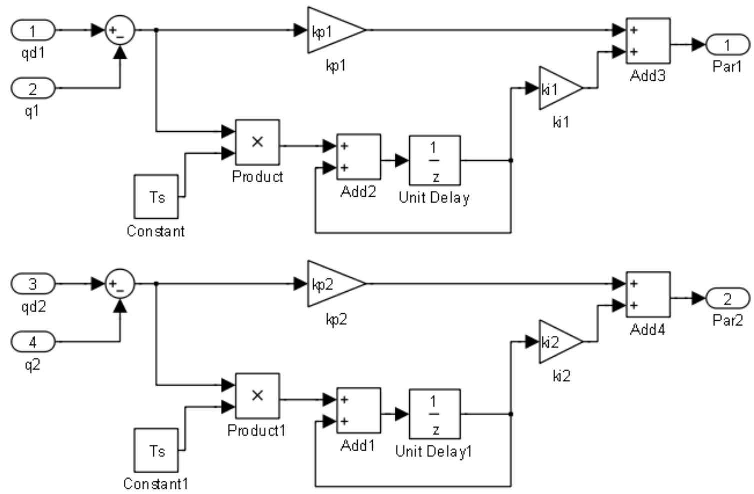
- Donde

$$M_{11}(\boldsymbol{q}) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 \left[l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] + I_1 + I_2$$
$$M_{12}(\boldsymbol{q}) = m_2 \left[l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] + I_2$$
$$M_{21}(\boldsymbol{q}) = m_2 \left[l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right] + I_2$$
$$M_{22}(\boldsymbol{q}) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

Control PI para el R de 2gdl

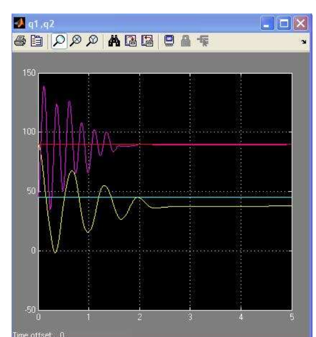


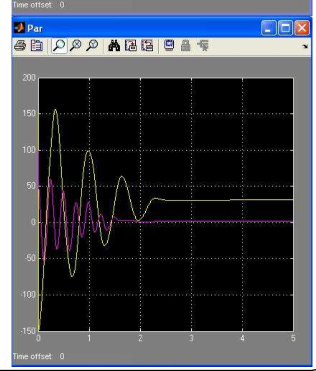
Control PI para el R de 2gdl



Control PI para el R de 2gdl

- %Parámetros del Péndulo y controlador PI
- clear; close
- Ts=1e-3
-
- %Controlador PI
- qd1=45*pi/180;
- qd2=90/pi/180;
- taoMax1=150
- taoMax2=10
-
- kp1=taoMax1/qd1
- kd1=0.4*kp1
- ki1=12
-
-
- kp2=taoMax2/qd2
- kd2=0.2*kp2
- ki2=12





Control PID para el R de 2gdl

Controlador PD con compensación de gravedad

- Controlador

$$\tau = k_p\tilde{q} + kv\dot{\tilde{q}} + g(q)$$

- Donde

$$\tilde{q} = q_d - q \; ; \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$$

$$g(q) = mgl_c \sin(q)$$

- Variables de estado

$$\mathbf{q} = [\tilde{q} \quad \dot{q}]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{ml_c^2 + I}\left[\tau - B\dot{q} - mgl_c \sin(q)\right]\end{bmatrix}$$

- Punto de equilibrio

$$\dot{\mathbf{q}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = 0 \\ \tilde{q} = 0 \;\Rightarrow\; q = q_d \end{cases}$$

- Función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}$$

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \mathbf{k}(q, \dot{q}) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K_p}\tilde{\mathbf{q}}$$

Controlador PD con compensación de gravedad

- Para el péndulo

$$k(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K_p}\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2$$

- La función es

$$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2$$

- Si

$$I_1 = ml_c^2 + I$$

- Entonces

$$\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) = \dot{q}\left(k_p\tilde{q} - k_v\dot{q} - B\dot{q}\right) - k_p\tilde{q}\dot{q}$$

$$= -k_v\dot{q}^2 - B\dot{q}^2 \leq 0$$

- $\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) \leq 0$ es semidefinida negativa
- Aplicando el teorema de LaSalle, se demuestra que es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma global.

Simulación en Simnon del Controlador PD con compensación de gravedad

Simulación en Simnon del Controlador PD con compensación de gravedad

Simulación en Simulink del Controlador PD

Simulación en Simulink del Controlador PD

Controlador Tanh

Controlador Tanh

- Controlador

$$\tau = k_p \tanh(\tilde{q}) + k_v \tanh(\dot{\tilde{q}}) + g(q)$$

- Donde

$$\tilde{q} = q_d - q\,; \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$$

$$g(q) = mgl_c \sin(q)$$

- Variables de estado

$$\mathbf{q} = [\tilde{q} \quad \dot{q}]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{ml_c^2 + I}\left[k_p \tanh(\tilde{q}) + k_v \tanh(\dot{\tilde{q}}) - B\dot{q}\right]\end{bmatrix}$$

- Punto de equilibrio

$$\dot{\mathbf{q}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = 0 \\ \tilde{q} = 0 \Rightarrow q = q_d \end{cases}$$

- Función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}$$

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \mathbf{k}(q, \dot{q}) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K_p}\tilde{\mathbf{q}}$$

Controlador Tanh

- Función candidata de Lyapunov definida positiva y radialmente desacotada

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + k_p \ln\left[\cosh(\tilde{q})\right], \text{ donde } I_1 = ml_c^2 + I$$

- La derivada

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}\left[k_p \tanh(\tilde{q}) - k_v \tanh(\dot{q}) - B\dot{q}\right] - k_p \dot{q} \tanh(\tilde{q})$$
$$= -k_v \dot{q} \tanh(\dot{q}) - B\dot{q}^2 \leq 0$$

- Usando el teorema de la Salle se demuestra la estabilidad

Simulación en Simnon del controlador

- La compensación de la gravedad se obtiene mediante el gradiente de la energía potencial. Así, y son la energía potencial del eslabón 1 y 2 respectivamente. Por lo que la compensación se define por:

$$g_1(q_1,q_2)=\frac{\partial u_1}{\partial q_1}+\frac{\partial u_1}{\partial q_1}=m_1 l_{c1} g\sin(q_1)$$

$$g_2(q_1,q_2)=\frac{\partial u_2}{\partial q_2}+\frac{\partial u_2}{\partial q_2}=m_1 l_1 g\sin(q_1)+2m_2 l_{c2} g\sin(q_1+q_2)$$

Simulación en Simulink del controlador

Otros controladores

Controlador	Función Candidata
$\tau = k_p \sin(\tilde{q}) + k_v \sin(\dot{\tilde{q}}) + g(q)$	$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + k_p \left[1 - \cos(\tilde{q})\right]$
$\tau = \frac{k_p \tilde{q}}{1+(\tilde{q})^2} - k_v \frac{k_p \dot{q}}{1+(\dot{q})^2} + g(q)$	$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + k_p \ln\left[1 + (\tilde{q})^2\right]$
$\tau = k_p (\tilde{q})^{2m-1} - k_v (\dot{q})^{2m-1} + g(q)$	$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m k_p (\tilde{q})^{2m}$
$\tau = k_p \operatorname{sgn}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{sgn}(\dot{q})^{2m-1} + g(q)$	$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k_p \lvert\tilde{q}\rvert$
$\tau = k_p \left[1 - \alpha e^{-\alpha\lvert\tilde{q}\rvert}\right] \operatorname{sgn}(\tilde{q}) - \left[1 - \beta e^{-\beta\lvert\tilde{q}\rvert}\right] \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q)$	$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + k_p \left[\lvert\tilde{q}\rvert + e^{-\alpha\lvert\tilde{q}\rvert} - 1\right]$

Controlador PD con compensador de gravedad 2gdl

Controlador PD con compensador de gravedad 2gdl

Control de par calculado