Ensayos

Una nueva manera de considerar a los espacios de Lipschitz de funciones periódicas integrables de diversas variables

Resumen

Este trabajo provee extensiones de los resultados para el caso unidimensional, ya considerados en [5, Jiménez 1999a]. Se consideran espacios de Lipschitz de funciones periódicas integrables de diversas variables. Se demuestra que con definiciones adecuadas, estos espacios son homogéneos y satisfacen muy buenas propiedades de aproximación polinomial. El caso de funciones de cuadrado integrable se considera de manera especial, pues deviene en un espacio de Hilbert. Se estudian las series de Fourier múltiple para este caso.

Abstract

This study extends the results for the unidimensional case already considered in [5, Jimenez 1999a]. It looks at Lipschitz spaces of integrable periodic functions of a number of variables. It demonstrates that, with adequate definitions, these spaces are homogeneous and fullfil very good properties of polinomial approximation. The case of integrable square functions is given special attention because it comes from a Hilbert space. The multiple Fourier series for this case are studied.

boadhesion technique has an excellent adhesion, since it doesn't come off

Abstrait

Ce travail fournit des extensions aux résultats pour le cas unidimensionnel déjà traîté dans [5, Jiménez 1999 a]. On prend des espaces de Lipschitz de fonctions périodiques intégrables de plusieurs variables. On démontre qu'avec des définitions adéquates, ces espaces sont homogènes et qu'ils remplissent de très bonnes propriétés d'approximation polynomiale. Le cas de fonctions de cadre intégrable se considère de manière particulière, car il devient un espace de Hilbert. On étudie les séries de Fourier multiple pour ce cas.

* Tirso M. A. Ramírez

1. Preliminares

El contenido esencial de esta sección es la presentación de los resultados de [5, Jiménez 1999a]: la definición usual de los subespacios de Lipschitz de L_{2p}^{p}, 1 ≤ $p < \infty$, se modifica para obtener espacios de Banach homogéneos y un espacio de Hilbert para $p = 2$; luego se muestra que el sistema trigonométrico es una base ortogonal. Sin embargo, la presentación dada aquí, considera funciones complejas en lugar de reales y se dan algunos ejemplos.

1.1 Definición de Lip_{a}^{p}.

Comencemos con las notaciones siguientes:

- F_{2p} denota al espacio lineal de todas las funciones complejas $2p$ periódicas y Lebesgue medibles definidas sobre el espacio real R, con la identificación usual de puntos módulo $2p$.
- C_{2p} denota al espacio de las funciones de F_{2p} que son continuas. Este espacio es de Banach con la norma del supremo, esto es,

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{c \in [0,2p]} \left| f(x) \right| .$$

* Profesor Investigador de la Universidad Tecnológica de la Mixteca

TEMAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA vol. 7 número 21 septiembre - diciembre 2003 pp 3 - 12

Igualmente, este espacio se identifica con el de todas las funciones complejas, continuas sobre el intervalo $[0,2\pi[$, equipado con la métrica $d: [0,2\pi[^2 \to [0,\pi]$, definida para toda $x, y \in [0,2\pi[$ por

$$d(x,y) := \min\{\ |x-y|,\ \ 2\pi - |x-y|\} \tag{1.1}$$

- $L^p_{2\pi}, 1 \le p < \infty$, es el espacio tradicional de Banach de todas las funciones $f \in F_{2\pi}$ para las cuales

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Aquí como es usual, dos funciones se identifican entre sí cuando son iguales Lebesgue casi dondequiera, lo que se denota c.d., abreviadamente.

Definición 1. Para una función periódica $f \in F_{2\pi}$, denotamos

$$\Delta_h(f,x) := f(x+h) - f(x); \qquad h > 0$$

y para $\alpha > 0,\ 1 \le p \le \infty$, el espacio de Lipschitz Lip^p_α es la clase de todas las funciones $f \in L^p_{2\pi}$, si $1 \le p < \infty$, o $f \in C_{2\pi}$, si $p = \infty$, tales que

$$\varphi^p_\alpha(f) := \sup\left\{\frac{\|\Delta_h(f,x)\|_p}{h^\alpha} : h > 0\right\} < \infty \tag{1.2}$$

Según [9, Mirkil 1960], Lip^p_α se llama de Lipschitz en el caso $\alpha = 1$ y de Hölder para $0 < \alpha < 1$; pero nosotros usaremos Lip en la notación e indistintamente los nombres de Hölder o Lipschitz, para todos los casos.

Para $\alpha > 1$ y cada $p \ge 1$, las únicas funciones que satisfacen (1.2) son las constantes.

Puesto que Lip^p_α es un espacio lineal y φ^p_α es una seminorma, una norma natural sobre Lip^p_α es usualmente dada por

$$\|f\|^*_{p,\alpha} := \|f\|_p + \varphi^p_\alpha(f) \tag{1.3}$$

La norma $\|\cdot\|^*_{p,\alpha}$ es llamada la norma de Hölder en el espacio Lip^p_α. Es conocido que el espacio Lip^p_α junto con esta norma es un espacio de Banach.

1.2. La mejor aproximación y espacios de Banach homogéneos.

Denotemos por τ_n al espacio lineal de dimensión finita de todos los polinomios trigonométricos de grado $m \le n$,

$$T_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} .$$

En el caso real estos polinomios toman la forma particular

$$T_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k senkx)$$

Para cualquier espacio de Banach B, tal que $\bigcup_n \tau_n \subset \hat{A} \subset F_{2\pi}$, denotamos la mejor aproximación de $f \in B$ a τ_n en la norma de B, por

$$E_n(f) := E_n(f, \|\cdot\|_B) := \inf_{T_n \in \tau_n}\|f - T_n\|_B .$$

Una serie de problemas típicos de Teoría de Aproximación han sido bien estudiados para funciones en Lip^p_α, $1 \le p \le \infty$, con la norma $\|\cdot\|_p$. Pero cuando este espacio se considera con su norma $\|\cdot\|^*_{p,\alpha}$, el principal problema es que las traslaciones no son operadores continuos con respecto al parámetro. Para explicar esta situación y para uso más adelante recordemos las definiciones siguientes.

Si $f \in L^1_{2\pi}$, y $h \in R$, se define el operador traslación mediante

$$T_h f(x) := f_h(x) := f(x+h).$$

Definición 2.

Un subespacio lineal B de $L^1_{2\pi}$, en el cual está definida una norma $\|\cdot\|_B$, que lo convierte en un espacio de Banach, se dice homogéneo si, para todo $f \in B$ y para toda $h \in R$ se tiene,

H1. $\|f\|_1 \le \|f\|_B$

H2. $f_h \in B$

H3. $\|f_h\|_B = \|f\|_B$

H4. $\|f_h - f\|_B \to 0$.

De H1 se deduce que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_B$ implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_1$, H2 y H3 son propiedades de invarianza bajo traslación y H4 nos dice que las traslaciones son operadores continuos con respecto al parámetro, es decir, la aplicación $h \to f_h$, es continua.

Algunos ejemplos de espacios homogéneos son:

(1) Los espacios $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$.

(2) $C_{2\pi}$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

(3) $C^{(n)}_{2\pi}$, el espacio de las funciones periódicas sobre $[0,2\pi[$, n-veces continuamente diferenciables, con

$$\|f\| := \sum_{0\le k\le n} \left\| f^{(k)} \right\|_{\infty}.$$

Para algunas referencias sobre los espacios de Banach homogéneos ver [6, Jiménez 2000b], [7, Jiménez 1989c] y [Katznelson 1968].

Muchas propiedades buenas de aproximación mediante series de Fourier han sido probadas para espacios de Banach homogéneos. Sin embargo, los espacios Lip_α^p no son homogéneos porque no satisfacen H4. En particular, la sucesión $E_n(f, Lip_\alpha^p) = E_n\left(f, \|\cdot\|_{p,\alpha}^*\right)$ no siempre converge a cero, lo cual sí se cumple para la sucesión $E_n(f) := E_n\left(f, \|\cdot\|_B\right)$, cuando B es igual a $C_{2\pi}$ o bien igual a $L_{2\pi}^p$, debido a que $\bigcup_n \tau_n$ es un subespacio denso en $C_{2\pi}$ y en $L_{2\pi}^p$.

Con esta mala propiedad en las manos, las investigaciones han seguido varias direcciones. En particular se trabaja sobre los espacios lip_α^p, (por ejemplo ver [2, Bustamante y Jiménez 2000a]) definidos a partir de la función $f \in Lip_\alpha^p$ para las cuales

$$\sup_{0<h\le\delta}\left\{\frac{\left\|\Delta_h(f,x)\right\|_p}{h^\alpha} : h>0\right\} \to 0$$ cuando $\delta \to 0$.

Sin embargo, nosotros veremos en esta sección que una modificación apropiada de la definición de los espacios de Lipschitz para $1 \le p < \infty$, nos provee de espacios de Banach homogéneos. Además, para $p = 2$, la versión correspondiente conduce a un espacio de Hilbert donde el sistema trigonométrico

(1.4) $$\left\{ e^{inx} : n \in Z \right\}$$

o bien, en el caso real,

$$\frac{1}{2}, \cos(x), \operatorname{sen}(x) \cdots, \cos(kx), \operatorname{sen}(kx), \cdots$$ es ortogonal.

Luego varias cuestiones sobre series de Fourier y sobre mejor aproximación mediante polinomios trigonométricos en estos espacios se pueden ver en un marco similar al de los espacios $L_{2\pi}^p$.

1.3. Los espacios B_α^p, $1 \le p < \infty$.

Los espacios $B_\alpha^p[0,2\pi[$, que serán considerados en esta subsección, fueron introducidos por primera vez por Jiménez en [5, 1999a]. En lo que sigue, escribiremos B_α^p en lugar de $B_\alpha^p[0,2\pi[$.

La función $d : [0,2\pi[^2 \to [0,\pi]$, dada por (1.1), se extiende a una pseudométrica sobre todo el plano: para toda $x, y \in [0,2\pi[$ y toda $j, k \in Z$,

$$d(x + 2j\pi, y + 2k\pi) = d(x, y).$$

Aquí como es habitual, pseudométrica significa la posibilidad de que la distancia entre dos puntos diferentes de R, sea cero. En realidad lo único que se desea, es extender de manera periódica en cada variable, con periodo 2π, la función distancia que teníamos en $[0,2\pi[^2$. Con ello se logra la invarianza por traslaciones siguiente.

Proposición 1. Para todo $0 \le x, y < 2\pi$ y $h \in R$, se tiene $d(x, y) = d(x+h, y+h)$.

En lo que sigue asumimos que $\alpha > 0$ es fijo y denotamos por $F_{(2\pi)^2}$ el espacio de todas las funciones complejas medibles según Lebesgue sobre R^2 que son 2π - periódicas en cada variable. Definimos el operador traslación siguiente para toda $x, h \in R^n, n = 1,2,$

$T_h : F_{(2\pi)^n} \to F_{(2\pi)^n}$ por

(1.5) $$(T_h f)(x) := f_h(x) := f(x+h).$$

Para f en $F_{(2\pi)^2}$, tenemos que

$$T_{(h_1,h_2)} f(x_1, x_2) := f(x_1 + h_1, x_2 + h_2), \quad h_1, h_2 \in R.$$

Luego, si $h = h_1 = h_2 \in R$, denotaremos

$$T_h f(x_1, x_2) := f(x_1 + h, x_2 + h).$$

Introducimos el operador $F_\alpha : F_{2\pi} \to F_{(2\pi)^2}$ mediante

(1.6) $$(F_\alpha f)(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^\alpha}, \quad x \ne y \bmod(2\pi), \quad x, y \in R.$$

Señalamos que más adelante necesitaremos de una extensión natural de estos operadores lineales.

Una observación simple pero importante es que F_α es antisimétrico. Esta propiedad significa que para toda $x, y \in R$ y para toda $f \in F_{2\pi}$, $(F_\alpha f)(x, y) = -(F_\alpha f)(y, x)$

Proposición 2. Los operadores T_h y F_α conmutan en el sentido siguiente: para toda $f \in F_{2\pi}$, y para toda $x, y, h \in R$, $F_\alpha(T_h f)(x, y) = T_h(F_\alpha f)(x, y)$.

Para una demostración de esta proposición y de todos los demás resultados que siguen en esta sección, ver [5, Jiménez 1999a]; allí se consideran demostraciones para el caso en que se tienen funciones reales.

Sea $L_{(2\pi)^2}^p$ el espacio de Banach de todas las funciones $f \in F_{(2\pi)^2}$ para los cuales $\|f\|_p := \left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^p\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$; $1 \le p < \infty$.

Definición 3. Fijemos $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$. El espacio B^p_α es la clase de todas las funciones $f \in L^p_{2\pi}$ para las cuales $F_\alpha f \in L^p_{(2\pi)^2}$.

Claramente, $\|F_\alpha(\cdot)\|_p$ es una seminorma sobre B^p_α. Entonces B^p_α es un espacio normado con $\|f\|_{p,\alpha} := \left(\|f\|_p^p + \|F_\alpha(f)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Aunque la expresión de la norma varía un poco con respecto al estilo de (1.3), resultará necesaria para nuestros objetivos y de todas formas es equivalente en el sentido siguiente: se dice que una norma $\|\cdot\|_1$ sobre un espacio vectorial X es equivalente a una norma $\|\cdot\|_2$ sobre X, si existen números positivos a y b tales que para toda $x \in X$ tenemos $a\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1 \le b\|\cdot\|_2$.

Teorema 1. Para cada $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$, el espacio B^p_α es un espacio homogéneo.

El resultado siguiente que se presentará requiere del concepto de unidad aproximativa. Recordemos que una unidad aproximativa (por ejemplo ver [6, Jiménez 2000b]) es una sucesión $(K_n) \subset C_{2\pi}$, que satisface:

(1) Para toda n, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$.

(2) Existe M tal que, para toda n,
$$\|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt \le M.$$

(3) Para cada $\delta \in [0,\pi[$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{2\pi-\delta}|K_n(t)|\,dt = 0.$$

Una unidad aproximativa también es llamada un núcleo o kernel de sumabilidad. Entre las unidades aproximativas más utilizadas están la de Fejér, la de Jackson y la de Fejér-Korovkin (ver [2, Bustamante y Jiménez 2000b]).

Corolario 1. Para cada $f \in B^p_\alpha$ y cada unidad aproximativa (K_n) de funciones continuas 2π - periódicas en $L^1_{2\pi}$, se tiene $\|K_n * f - f\|_{p,\alpha} \to 0$, si $n \to \infty$ donde * denota la convolución de K_n y f.

Si $f \in B^p_\alpha$, entonces la serie de Fourier de f está definida por
$$\sum_{n=\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\, e^{int},$$
donde
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{int}\,dt$$
es el coeficiente de Fourier n-ésimo.

En el caso real, la serie de Fourier de f es
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sennx),$$
y sus coeficientes están dados por las fórmulas
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)\,dt \quad \text{y} \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, sen(nt)\,dt, \quad n=0,1,2,\ldots$$

El núcleo de Fejér está dado por
$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{sen^2\frac{(n+1)}{2}x}{sen^2\frac{x}{2}}.$$

Es conocido que el núcleo de Fejér, (F_n), es una unidad aproximativa y así tenemos un caso particular del corolario anterior.

Corolario 2. Si $f \in B^p_\alpha$, entonces $\|F_n * f - f\|_{p-\alpha} \to 0$, si $n \to \infty$. En particular, toda función $f \in B^p_\alpha$ es aproximable por los polinomios trigonométricos en dicho espacio[1].

Las integrales dobles que aparecen en nuestro desarrollo se pueden simplificar como sigue:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_\alpha f(x,y)|^p\,dxdy = 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)-f(x+h)}{|h|^\alpha}\right|^p dxdh = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x)-f(x+h)}{|h|^\alpha}\right|^p dxdh \tag{1.7}$$

También
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_\alpha f(x,y) F_\beta v(x,y)\,dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(u(x)-u(x+h))(v(x)-v(x+h))}{|h|^{\alpha+\beta}}\,dxdh$$
si $u \in B^p_\alpha$, $v \in B^p_\beta$, $\alpha, \beta > 0$; $1 \le p,q < \infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Ejemplo 1. Este ejemplo ilustra la importancia práctica del lado derecho de (1.7). Sea $f(x) = sen(x)$, entonces
$$F_\alpha f(x,y) = \frac{sen(x)-sen(y)}{d(x,y)^\alpha}$$
y
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_\alpha f(x,y)|^p\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{sen(x)-sen(y)}{d(x,y)^\alpha}\right|^p dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{sen(x)-sen(x+h)}{h^\alpha}\right|^p dxdh.$$

Casos particulares

- Para $p=2$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_\alpha f(x,y)|^p\,dxdy = 4\pi\int_0^{\pi}\frac{1-cos(h)}{h^{2\alpha}}\,dh$$
- Si $p=2$ y $\alpha = 1$,
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_\alpha f(x,y)|^p\,dxdy = 4\left(-2+\pi\int_0^{\pi}\frac{sen(h)}{h}\,dh\right)$$
$$\approx 15.2721.$$

Usando el lado izquierdo de (1.7) con $p=2$ y $\alpha=1$, el cálculo hubiese sido más tedioso. En efecto:
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_\alpha f(x,y)|^p\,dxdy$$

1 Para valores particulares de α y p, pudiese ocurrir que B^p_α sólo contuviera funciones constantes. En tales casos, este corolario debe entenderse como que $\{e^{inx} : n \in Z\} \cap B^p_\alpha$ es total en B^p_α.

$$= \int_0^{2p} \int_0^{2p} \left| \frac{sen(x) - sen(y)}{d(x,y)^a} \right|^p dxdy$$

$$= \int_0^{2p} \int_0^{2p} \left| \frac{sen(x) - sen(y)}{d(x,y)} \right|^2 dxdy$$

$$= \int_0^{p} \int_{x+p}^{2p} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(2p - y + x)^2} dydx +$$

$$\int_0^{p} \int_x^{x+p} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(y-x)^2} dydx + \int_p^{2p} \int_x^{2p} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(y-x)^2} dydx +$$

$$\int_0^{p} \int_0^{x} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(y-x)^2} dydx + \int_p^{2p} \int_{x-p}^{x} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(x-y)^2} dydx +$$

$$\int_p^{2p} \int_0^{x-p} \frac{[sen(x) - sen(y)]^2}{(2p - x + y)^2} dydx$$

$$= 4\left(-2 + p\int_0^{p} \frac{sen(h)}{h} dh \right)$$

$$\approx 5.2721 \text{. ?}$$

Ejemplo 2. Sea $f(x) = sen(4x)$, $p = 2$ y $a = \frac{1}{2}$, entonces

$$\int_0^{2p} \int_0^{2p} \frac{[sen(4x) - sen4(y)]^2}{d(x,y)} dydx = \int_{-p}^{p} \int_{-p}^{p} \frac{[sen(4x) - sen4(x+h)]^2}{h} dxdh$$

$$= 4p\left[g - \int_0^{4p} \frac{cos(h)}{h} dh + \log(4p) \right]$$

$$\approx 9.1362$$

donde g es la constante de Euler, $g \approx 0.577216$. ?

Ejemplo 3. En este ejemplo se da una función f que está en L^p_{2p} pero que no está en B^p_a. Sea $f : [-p,p] \to R$, definida por

$$f(x) = 1, \quad \text{si } x \in \left[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2} \right]$$

$$= 0, \quad \text{si } x \notin \left[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2} \right].$$

Claramente, $f \in L^p_{2p}$, $1 \leq p < \infty$, pero en general, $f \notin B^p_a$

:

$$\|F_a f\|_p^p = \frac{1}{4p^2} \int_0^{2p} \int_0^{2p} |F_a f(x,y)|^p dxdy$$

$$= \frac{1}{2p^2} \int_0^{p} \int_0^{2p} \left| \frac{f(x) - f(x+h)}{h^a} \right|^p dxdh$$

$$= \frac{1}{2p^2} \int_0^{p} \frac{2h}{h^{ap}} dh$$

$$= \frac{1}{2p^2} \int_0^{p} \frac{1}{h^{ap-1}} dh$$

$< \infty$ si y sólo si $a < \frac{2}{p}$. ?

A continuación se da un teorema de inmersión pero recordamos primero la definición de "inmerso continuamente". Sean X y Y espacios de Banach. Entonces, se dice que X está inmerso continuamente en Y si X se identifica con un subconjunto de Y y existe una constante C tal que para cada $x \in X$, $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$

En este caso se dice que el operador que realiza la identificación $I : X \to Y$, es el operador de inmersión de X en Y. Un ejemplo conocido es el siguiente: si $p > q$, L^p_{2p} está continuamente inmerso en L^q_{2p}.

Teorema 2. Para cada $a > 0$ y $1 \leq p < \infty$, el espacio de Lipschitz clásico Lip^p_a definido en la sección 1 está continuamente inmerso en B^p_a.

El resultado siguiente involucra a los espacios estrictamente convexos. Recordamos primero a estos espacios. Una norma estrictamente convexa es una norma tal que para todo x, y de norma 1, $\|x - y\| < 2$, $x \neq y$.

Un espacio normado con esta norma se llama un espacio normado estrictamente convexo. Como ejemplo de este tipo de espacios tenemos a todos los espacios L^p_{2p}, $1 < p < \infty$. Un ejemplo de un espacio que no es estrictamente convexo es $C[a,b]$, el espacio de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$.

Proposición 3. Para cada $a > 0$ y $1 < p < \infty$, los espacios B^p_a son estrictamente convexos.

Como una consecuencia tenemos el resultado siguiente no trivial:

Corolario 3. Para cada $f \in B^p_a$, $1 < p < \infty$, n=1,2,. . . y $a > 0$ tal que $\left\{ e^{inx} : n \in Z \right\} \subset B^p_a$, existe un polinomio único de la mejor aproximación de f a t_n.

Para detalles sobre los espacios estrictamente convexos, ver [3, Cheney 1996] y [10, Rivlin 1969].

1.4. El espacio de Hilbert B_a.

En esta subsección se estudia B^p_a para el caso en que $p = 2$. Esto también fue presentado por primera vez en [5, Jiménez 1999a]. Escribiremos abreviadamente, $\|\cdot\|_a := \|\cdot\|_{2,a}$ y $B_a := B^2_a$. Veremos que el sistema trigonométrico (1.4), $\{e^{inx} : n \in Z\}$, es una base ortogonal de este espacio. Para el caso real ver [5, Jiménez 1999a].

Proposición 4. El funcional, sesquilineal

$$(f|g):=(f|g)_{L^2_{2p}}+(F_a f|F_a g)_{L^2_{(2p)^2}},\quad f,g\in B_a$$,

es un producto interior cuya norma asociada $\|f\|_a=(f|f)^{\frac{1}{2}}$ es igual a $\|f\|_{2,a}$.

Aquí $(f|g)_{L^2_{2p}}=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}f(x)\overline{g(x)}\,dx$

$$(F_a f|F_a g)_{L^2_{(2p)^2}}=\frac{1}{(2p)^2}\int_0^{2p}\int_0^{2p}F_a f(x,y)\overline{F_a g(x,y)}\;dxdy$$

Luego, B_a es un espacio de Hilbert.

Teorema 3. El sistema trigonométrico (1.4) es una base ortogonal de B_a cuyos elementos tienen las normas:

$$K_a(n)^2=\|e^{inx}\|_a^2=1+\frac{1}{2p}\int_0^{p}\frac{|1-e^{inh}|^2}{h^{2a}}dh$$

para n=0,1,2,3,. . .

De la proposición 4, la gran variedad de resultados generales de los espacios de Hilbert se cumplen en B_a^p (por ejemplo ver [4, Deutsch 2001]). En particular, usando el teorema 3, tendremos:

Teorema 4. Sea H un espacio de Hilbert, con producto interior $(\cdot|\cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H$. Sea F un subespacio lineal de H que se convierte en un espacio de Hilbert bajo un producto interior $(\cdot|\cdot)_F$ y tal que $\|\cdot\|_H\leq\|\cdot\|_F$ sobre F. Si $\{u_j : j=1,2,\cdots\}$ es una base ortonormal de H que simultáneamente es una base ortogonal de F, entonces para cada $f\in F$, la serie de Fourier de f es formalmente igual para ambos espacios.

Corolario 4. Para cada $f\in B_a$, la serie de Fourier de f en este espacio es la misma que la de f en L^2_{2p}.

Además, $f(x)=\sum_{n=\infty}^{\infty}A_n e^{inx}\in L^2_{2p}$

está en B_a si y sólo si $\sum_{n=\infty}^{\infty}A_n^2[K_a(n)]^2<\infty$.

2. Los Espacios $B_a^p([0,2p[^2)$

En esta sección consideraremos al espacio $B_a^p([0,2p[^2)$, $1\leq p<\infty$, $a>0$, para el caso en que $n=2$.

Comenzamos con las notaciones siguientes:

- $F_{(2p)^4}$ denota al espacio lineal de todas las funciones complejas medibles según Lebesgue sobre R^4, que son $2p$ - periódicas en cada variable.
- $L^p_{(2p)^4}$, $1\leq p<\infty$, es el espacio de Banach de todas las funciones $f\in F_{(2p)^4}$ para los cuales

$$\|f\|_p:=\left(\frac{1}{(2p)^4}\int_0^{2p}\int_0^{2p}\int_0^{2p}\int_0^{2p}|f(x,y,u,v)|^p\,dxdydudv\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$.

Definición 4. Para una función periódica $f\in F_{(2p)^2}$, denotamos

$\Delta_h(f,x):=f(x+h)-f(x)$, $h=(h_1,h_2)$, $x=(x_1,x_2)$ y para $a>0$, $1\leq p\leq\infty$, el espacio de Lipschitz $Lip_a^p([0,2[^2)$ es la clase de todas las funciones $f\in L^p_{(2p)^2}$, si $1\leq p<\infty$, o $f\in C_{(2p)^2}$, si $p=\infty$, tales que

$$j_a^p(f):=\sup\left\{\frac{\|\Delta_h(f,x)\|_{L^p_{(2p)^2}}}{|h|^a}:h=(h_1,h_2)\right\}<\infty$$,

donde $C_{(2p)^2}$ es una extensión natural de C_{2p}.

Generalicemos la métrica $d:[0,2p[^2\to[0,p]$ definida en (1.1). Definimos para toda $x,y,u,v\in[0,2p[$, $d_2:[0,2p[^4\to R$ por $d_2[(u,v),(x,y)]:=\sqrt{d(u,x)^2+d(v,y)^2}$.

donde $d\ (=d_1)$ es como en la sección 1.

En lo que sigue, suponemos que se ha fijado $a>0$.

Definición 5. Definimos los dos operadores lineales siguientes. Para toda $x,y,h\in R^n$, $n=1,2$,

$$T_h:=F_{(2p)^n}\to F_{(2p)^n}$$
$$(T_h f)(x):=f_h(x):=f(x+h)$$.

El otro operador será $F_a:F_{(2p)^n}\to F_{(2p)^{2n}}$

$$(F_a f)(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{d_n(x,y)^a}$$, si $x\neq y$.

Para f en $F_{(2p)^{2n}}$, tenemos que $T_{(h_1,h_2)}f(x_1,x_2):=f(x_1+h_2,x_2+h_2)$, $h_1,h_2\in R^n$.

Obsérvese que los dos operadores de la definición anterior son extensiones naturales de (1.5) y (1.6), respectivamente. El primer operador, obviamente, es el operador de traslación.

Proposición 5. Los operadores T_h y F_a, conmutan en el sentido siguiente: para toda $f\in F_{(2p)^n}$ y para toda $x,y,h\in R^n$, $n=1,2$, $F_a(T_h f)(x,y)=T_h(F_a f)(x,y)$

Demostración.

$$T_h(F_a f)(x,y)=F_a f(x+h,y+h)$$
$$=\frac{f(x_1+h_1,\ldots,+x_n+h_n)-f(y_1+h_1,\ldots,+y_n+h_n)}{\left(\sum_{i=1}^{n}d(x_i+h_i,\ldots,y_i+h_i)^2\right)^{\frac{a}{2}}}$$

$$= \frac{f(x_1+h_1,\dots,+x_n+h_n) - f(y_1+h_1,\dots,+y_n+h_n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{T_h f(x) - T_h f(y)}{d_n(x,y)^\alpha}$$

$$= F_\alpha (T_h f)(x,y).$$

Definición 6. Fijemos $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$. El espacio $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ es la clase de todas las funciones $f \in L^p_{(2\pi)^2}$ para las cuales $F_\alpha f \in L^p_{(2\pi)^4}$.

Obsérvese que $|F_\alpha(\cdot)|_p$ es una seminorma sobre $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$. Entonces como en la sección 1, $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ es un espacio normado con $\|f\|_{p,\alpha} := \left(\|f\|_p^p + \|F_\alpha(f)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Considerando de manera natural los espacios homogéneos en diversas variables, se tiene el resultado siguiente.

Teorema 5. Para cada $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$, el espacio $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ es un espacio de Banach homogéneo.

Demostración. Probaremos primero que el espacio es completo. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $f \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$. En p[redacted]rticular, (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p_{(2\pi)^2}$. Entonces existe f en $L^p_{(2\pi)^2}$ tal que

(2.1) $\|f_n - f\|_p \to 0$, si $n \to \infty$.

Necesitamos probar que $f \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ y que

(2.2) $\left|F_\alpha(f_n - f)\right|_p \to 0$ si $n \to \infty$.

Puesto que $f \in L^p_{(2\pi)^2}$ y $\|F_\alpha f\|_p \le \|F_\alpha(f_n - f)\|_p + \|F_\alpha f_n\|_p$, la afirmación que $f \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ automáticamente se sigue de (2.2).

Para probar esta última propiedad, observe que $(F_\alpha f_n)$ también es una sucesión de Cauchy en $L^p_{(2\pi)^4}$. Entonces existe un $g \in L^p_{(2\pi)^4}$, tal que

(2.3) $\|F_\alpha f_n - g\|_p \to 0$ si $n \to \infty$.

Por otro lado $\|F_\alpha(f_n - f)\|_p = \|F_\alpha f_n - F_\alpha f\|_p$. Así sólo tenemos que probar que

(2.4) $F_\alpha f = g$ c.d.

Por (2.1), existe una subsucesión (f_{n_j}) que converge a f c.d. sobre $[0,2\pi[^2$ y por (2.3), otra subsucesión $(F_\alpha f_{n_{j_k}})$ que converge a g c.d. sobre $[0,2\pi[^4$. Entonces (2.4) se cumple.

Las propiedades (H_1: para todo $f \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$, $\|f\|_1 \le \|f\|_{p,\alpha}$) y ($H_2$: para todo $h \in R^2, f_h \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$) son claras. Para probar las propiedades H_3 y H_4 en $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$, usaremos el hecho de que ambas se satisfacen en $L^p_{(2\pi)^n}$, $n = 2,4$, así como también la proposición 5. Sea $f \in B^2_\alpha([0,2\pi[^2)$ dado y $h \in R^2$. Entonces:

$$\|T_h f\|_{p,\alpha}^p = \|T_h f\|_p^p + \|F_\alpha(T_h f)\|_p^p$$
$$= \|T_h f\|_p^p + \|T_h(F_\alpha f)\|_p^p$$
$$= \|f\|_p^p + \|F_\alpha f\|_p^p$$
$$= \|f\|_{p,\alpha}^p$$

Así H_3 se cumple en $B^2_\alpha([0,2\pi]^2)$. La prueba de H_4 es:

$$\|T_h f - f\|_{p,\alpha}^p = \|T_h f - f\|_p^p + \|F_\alpha(T_h f - f)\|_p^p$$
$$= \|T_h f - f\|_p^p + \|T_h(F_\alpha f) - F_\alpha f\|_p^p$$

que converge a 0 si h tiende a 0.

Para uso posterior, supondremos que el sistema trigonométrico sobre $[0,2\pi]^2$ se define de manera natural, mediante el conjunto

(2.5) $\{e^{inx} e^{imy} : m,n \in Z\}$.

Corolario 5. Para cada $f \in B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$ y cada unidad aproximativa (K_n) de funciones continuas 2π - periódicas en $L^1_{(2\pi)^2}$, se tiene $\|K_{n,m} * f - f\|_{p,\alpha} \to 0$, si $n,m \to \infty$, donde $*$ denota la convolución de K_n y f.

En particular, tomando el núcleo de Féjer bidimensional $F_{n,m}(x,y) := F_n(x) F_m(y)$, se tiene que el sistema trigonométrico (2.5), es denso en $B^p_\alpha([0,2\pi[^2)$.

Usando la hipótesis de que $F_\alpha f \in L^p_{(2\pi)^4}$, $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$, en particular la 2π - periódicidad en cada variable y el Teorema de Fubini, se tiene:

$$\int_{[0,2\pi]^4} \left| F_\alpha f(x,y,u,v) \right|^p du\, dv\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(u,v) - f(x,y)}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha} \right|^p du\, dv\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} \left| \frac{f(u,v) - f(x,y)}{\left[d(u,v)^2,(x,y)^{\text{[redacted]}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p du\, dv\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dt\, ds\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dy\, dx\, ds\, dt$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]^2}\int_{[0,2\pi]^2} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p d(x,y)\, d(s,t)$$

Así,

$$(3.1)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(u,v)-f(x,y)}{d_2[(u,v),(x,y)]^{\alpha}}\right|^p dx\,dy\,du\,dv =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+s,y+t)-f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}}\right|^p dx\,dy\,ds\,dt$$

donde $x,y,u,v,s,t\in R$. Obsérvese que si $y=v=0$, la fórmula anterior se reduce a la fórmula (1.7) de la sección 1.

Igualmente la fórmula siguiente se utilizará en la definición del producto escalar:

$$\int_{[0,2\pi]^4} F_\alpha f(x,y,u,v)\overline{F_\beta g(x,y,u,v)}\,dx\,dy\,du\,dv$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[f(x+s,y+t)-f(x,y)]\,\overline{[g(x+s,y+t)-g(x,y)]}}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}dx\,dy\,ds\,dt$$

donde $f\in B_\alpha^p\left([0,2\pi]^2\right)$, $g\in B_\beta^q\left([0,2\pi]^2\right)$, $\alpha,\beta>0$, $1\le p,q<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

El lado derecho de la fórmula (3.1), realmente simplifica el lado izquierdo. Para ilustrar este hecho, se invita al lector a evaluar directamente la integral múltiple que se calcula en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Sea $f(x,y)=sen(x+y)$, entonces $F_\alpha f(x,y,u,v)=\dfrac{sen(x+y)-sen(u+v)}{d_2[(u,v)\ (X,Y)]^{\alpha}}$. Con $p=2$, $\alpha=1$ y usando el lado derecho de (3.1), tenemos

$$\int_{[0,2\pi]^4}\left|F_\alpha f(x,y,u,v)\right|^p dx\,dy\,du\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[sen(u+v)-sen(x+y)]^2}{d_2[(u,v),(x,y)]}dx\,dy\,du\,dv$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[sen(x+h+y+k)-sen(x+y)]^2}{\sqrt{h^2+k^2}}dx\,dy\,dh\,dk$$

$$=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}dh\,dk$$

$$\approx 692.553\,.\ ?$$

Proposición 6. Para cada $\alpha>0$ y $1\le p<\infty$, los espacios de Lipschitz clásicos $Lip_\alpha^p\left([0,2]^2\right)$ definidos en la sección 1 de este capítulo están continuamente inmersos en $B_\alpha^p\left([0,2\pi]^2\right)$.

Demostración. Claramente $Lip_\alpha^p\left([0,2[^2\right)\subset B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$. Resta ver que para cada $f\in Lip_\alpha^p\left([0,2[^2\right)$, $\|f\|_{p,\alpha}\le C\|f\|_{p,\alpha}^*$; pero esto se sigue del hecho que $\|F_\alpha f\|_p\le \varphi_\alpha^p(f)$.

Proposición 7. Para cada $\alpha>0$ y $1<p<\infty$, los espacios $B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$ son estrictamente convexos.

Demostración. Sean $f,g\in B_\alpha^p\left([0,2\pi]^2\right)$ tales que $\|f\|_{p,\alpha}=\|g\|_{p,\alpha}=1$. Se sigue que

$$\|f+g\|_{p,\alpha}\le\left(\|f\|_p^p+\|F_\alpha(f)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\|f\|_{p,\alpha}+\|f\|_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}=2\,.$$

Entonces $\|f+g\|_{p,\alpha}=2$ es posible sólo si $f=g$ c.d.

Denotemos por $T_{n,m}$ al espacio lineal de dimensión finita de todos los polinomios trigonométricos en dos variables $T_{n,m}(x,y):=\sum_{|j|\le n}\sum_{|k|\le m}c_{j,k}e^{ijx}e^{iky}$.

Usando esta notación y la proposición anterior, tenemos el resultado siguiente no trivial:

Corolario 6. Para cada $f\in B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$, $1<p<\infty$ y $\alpha>0$ tal que $\left\{e^{ijx}e^{iky}: j,k\in Z\right\}\subset B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$ existe un polinomio único de la mejor aproximación de f a $T_{n,m}\left([0,2\pi[^2\right)$ en $B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$.

3. El Espacio De Hilbert $B_\alpha\left([0,2\pi]^2\right)$

En esta sección se define un producto interior $(f\mid g)$ bajo el cual el espacio $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ se convierte en un espacio de Hilbert. También se demuestra que el sistema trigonométrico (2.5) es una base ortogonal de este espacio. Escribiremos $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ en lugar de $B_\alpha^2\left([0,2\pi[^2\right)$.

Se prueba sin dificultad lo siguiente:

Proposición 8. El funcional sesquilineal $(f\mid g):=(f\mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}}+(F_\alpha f\mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}$, $f,g\in B_\alpha\left([0,2\pi]^2\right)$ es un producto interior cuya norma asociada $\|f\|_\alpha=(f\mid f)^{\frac{1}{2}}$ ∎ es igual a $\|f\|_{2,\alpha}$. Aquí

$$(f\mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x,y)\overline{g(x,y)}\,dx\,dy$$

$$(F_\alpha f\mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_\alpha f(x,y,u,v)\overline{F_\alpha g(x,y,u,v)}\,dx\,dy\,du\,dv\,.$$

Luego, $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ es un espacio de Hilbert y por lo tanto los resultados generales de los espacios de Hilbert se cumplen en este espacio (por ejemplo ver [4, Deutsch 2001].

Ahora probaremos que el sistema trigonométrico (2.5) es una base ortogonal de este espacio.

Proposición 9. Sea $\alpha > 0$ tal que $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in Z\} \subset B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$. El sistema trigonométrico $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in Z\}$ es una base ortogonal de $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ cuyos elementos tienen las normas:

$$K_\alpha(n,m)^2 = \left\|e^{inx}e^{imy}\right\|_\alpha^2 \tag{4.1}$$

$$= 1 + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|1-e^{inh}e^{imk}\right|^2}{\left(h^2+k^2\right)}\,dh\,dk$$

Demostración. Se tiene

$$(f \mid g) := (f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} + (F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}, \quad f,g \in B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$$

Se sabe que

$$(f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} = (e^{inx}e^{imy} \mid e^{isx}e^{ity})_{L^2_{(2\pi)^2}} = 1 \quad \text{si } n = s \text{ y } m = t$$

$$= 0 \text{ en otro caso.}$$

Con $f(x,y) = e^{inx}e^{imy}$, $g(x,y) = e^{isx}e^{ity}$ y

$$F_\alpha f(x,y,u,v) = \frac{e^{inx}e^{imy} - e^{inu}e^{imv}}{d_2[(u,v),(x,y)]}$$, se tiene

$$(F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}$$

$$= \left(F_\alpha(e^{inx}e^{imy}) \mid (e^{isx}e^{ity})\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy} - e^{inu}e^{imv}}{d_2[(u,v),(x,y)]}\cdot\overline{\frac{e^{isx}e^{ity} - e^{isu}e^{itv}}{d_2[(u,v),(x,y)]}}\,dx\,dy\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy} - e^{in(x+h)}e^{im(y+k)}}{[h^2+k^2]}\cdot\frac{e^{-isx}e^{-ity} - e^{-is(x+h)}e^{-it(y+k)}}{[h^2+k^2]}\,dx\,dy\,dh\,dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy}\left(1-e^{inh}e^{imk}\right)}{[h^2+k^2]}\cdot\frac{e^{-isx}e^{-ity}\left(1-e^{-ish}e^{-itk}\right)}{[h^2+k^2]}\,dx\,dy\,dh\,dk$$

que se anula si $n \neq s$ o bien $m \neq t$, de donde sigue la ortogonalidad. Si $n = s$ y $m = t$, se tiene

$$(F_\alpha f \mid F_\alpha f)_{L^2_{(2\pi)^4}} = \left(F_\alpha(e^{inx}e^{imy}) \mid F_\alpha(e^{inx}e^{imy})\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-e^{inh}e^{imk}\right)\left(1-e^{-inh}e^{-imk}\right)}{\left(h^2+k^2\right)}\,dh\,dk$$

de donde se sigue (4.1).

Cuando el sistema trigonométrico (2.5) es un subconjunto de $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$, sus combinaciones lineales finitas, es decir los polinomios trigonométricos, son densos en $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ (ver el comentario que sigue al corolario 5). Por lo tanto $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in Z\}$, es una base ortogonal.

Ahora se sigue sin dificultad el planteamiento de la teoría de desarrollos ortonormales en espacios de Hilbert (por ejemplo ver [7, Jiménez 1989c]. Como caso particular, teniendo presente el teorema (4), una función $f \in L^2_{(2\pi)^2}$, expresada en ese espacio mediante su desarrollo $f(x,y) := \sum_{n,m} A_{n,m}e^{inx}e^{imy}$ pertenece a $B_\alpha\left([0,2\pi[^2\right)$ si y sólo si $\sum_{n,m\in Z} A_{n,m}^2\left[K_\alpha(n,m)\right]^2 < \infty$

Conclusiones

Los espacios de Hölder de funciones periódicas integrables $B_\alpha^p\left([0,2\pi[\right)$, introducidos por Jiménez, pueden ser igualmente definidos en el caso de funciones de dos variables. Aquí se denotan por $B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$.

Para todo $\alpha > 0$, los espacios $B_\alpha^p\left([0,2\pi[^2\right)$ son homogéneos si $1 \leq p < \infty$ y estrictamente convexos si $1 < p < \infty$. El espacio $B_\alpha^2\left([0,2\pi[^2\right)$ es de Hilbert y si α es "pequeño", entonces el sistema trigonométrico $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in Z\}$ es una base ortogonal del espacio. Los resultados pueden generalizarse a más de dos variables.

Si bien el esquema de introducción y demostraciones de los resultados aquí presentados es muy similar al esquema de Jiménez en su artículo original, la fórmula de reducción d■integrales debe tomarse en $[-\pi,\pi]^2$ respecto del parámetro, lo cual resalta una diferencia significativa con el caso unidimensional y con los espacios de Besov

Bibliografía

(1) J. Bustamante y M. A. Jiménez

2001 Series de Fourier y funciones de Lipschitz, Margarita Matemática en Memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe, Universidad la Rioja, España.

(2) J. Bustamante y M. A. Jiménez

2000 Trends in Hölder approximation, Aportaciones Matemáticas, Serie de Comunicaciones, 27, 23-31.

(3) E. W. Cheney

1996 Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York.

(4) F. Deutsch

2001 Best Approximation in Inner Product Spaces, Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag.

(5) M. A. Jiménez

1999 A new approach to Lipschitz spaces of periodic integrable functions, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones, 25, 153-157 (demostraciones de los enunciados en el preprint del mismo título editado en la FCFM-BUAP).

(6) M. A. Jiménez

2000 Espacios de Banach homogéneos y funciones de Hölder, Preprint presentado en el Seminario Internacional de Teoría de Aproximación; Puebla.

(7) M. A. Jiménez

1989 Medida, Integración y Funcionales, Pueblo y Educación, La Habana.

(8) Y. Katznelson

1968 An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley & Sons, New York.

(9) H. Mirkil

1960 Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions, Can. J. Math, 12; pp 674-685.

(10) T. J. Rivlin

1969 An Introduction to the Approximation of Functions, Dover Pub., New York.