

Ensayos

Matemáticas Ocultas en el Mundo Viviente.

Recientemente, es más familiar el punto de vista de que haya leyes ocultas de la vida -- leyes matemáticas que son más profundas

Resumen	Abstract	Abstrait
que las del ADN. Revisemos tal punto de vista proporcionando algunos ejemplos del mundo vivo .	Recently, it is becoming more widely accepted that there are hidden laws in life – mathematical laws which are deeper than those of ADN. This point of view is examined through some examples from the living world.	Depuis quelque temps, il est très courant de dire qu'il y a des lois occultes de la vie – lois mathématiques qui sont plus profondes que celles de l'ADN. Vérifions un tel point de vue en prenant en compte quelques exemples au sein du monde vivant.

* Masaki Hayashi

** Honorio Vera Mendoza

Keywords

La secuencia de Fibonacci, Ecuación de la Reacción-Difusión, patrón de Turing, Fractales, Boid.

1. Introducción

Las matemáticas han desempeñado un papel inseparable, como una herramienta o lenguaje en el desarrollo de la física, para clarificar la lógica del mundo material. Muy poca atención se ha prestado al papel de las matemáticas en las ciencias de la vida. Sin embargo las actuales ciencias de la vida, las cuales se han estado desarrollando muy rápidamente en años recientes, y cuentan excesivamente con el ADN. Tal parece que hay leyes ocultas de la vida, que yacen más profundas que las del ADN. Las aproximaciones basadas en el énfasis excesivo del ADN son unilaterales, y las aproximaciones, desde el punto de vista basado en las ciencias físico-matemáticas son necesarias ¹⁾ Bajo los genes yace el rico universo físico con sus patrones, formas, estructuras, y sistemas profundos. Tal mundo, con su infinita sutileza puede ser descrito sólo a través de las matemáticas. En este artículo revisamos con brevedad algunos ejemplos del mundo vivo desde tal punto de vista.

Organizamos el estudio como sigue: En la sección 2 tomamos algunos ejemplos del mundo de plantas, tales como los números de Fibonacci, en pétalos de flores, el embalaje de las semillas de girasol y fractales. En la sección 3 tomamos algunos ejemplos del mundo de los animales, tales como los patrones de Turing de los peces ángel y de las conchas de mar. En la sección 4 describimos los comportamientos de orden colectivo de los animales que viven en sociedad y que prestan atención particular al co-llamado boid introducido por C.Reynolds. La sección 5 resume el

* School of Life Science, Tokyo University of Pharmacy and Life Science

** Universidad Tecnológico de Puebla

artículo. En el apéndice derivamos un conjunto de fórmulas para la secuencia de Fibonacci, necesaria para describir las regularidades observadas en el mundo de las plantas.

2. El mundo de las plantas florales

En primer lugar, prestemos atención a la numerología asombrosa de los pétalos florales. Cuando contamos números de pétalos, encontramos que toman siempre números específicos. Son los números tomados de la secuencia de Fibonacci, en la cual cada número es igual a la suma de los dos números precedentes. Si se denota el n -ésimo término de la secuencia de Fibonacci en términos de, entonces se tiene

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3) \quad (1)$$

donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Entonces tenemos

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (2)$$

La mayoría de las excepciones son una u otra secuencia, compuesta al multiplicar por 2 la secuencia anterior, es decir:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \dots \quad (3)$$

o la llamada secuencia "anormal", en la que $=3$, difiere de la secuencia normal (2) y por lo tanto es

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots \quad (4)$$

La serie de semillas de girasol también está relacionada con la secuencia de Fibonacci (2). Las semillas del girasol dibujan dos familias de espirales, una de las cuales, está distribuida hacia el sentido de las manecillas del reloj, mientras que la otra se haya en sentido opuesto a él. Los pares (34,55), (55,89), (89,144),... de los cuales consiste el número de éstas familias de espirales, representan los números consecutivos de la secuencia de Fibonacci. Las cabezas de las margaritas también poseen patrones similares en ellas. Las piñas tienen 8 filas de escalas -- esos pedacitos de forma diamantada -- que se inclinan a la izquierda y 13 a la derecha, lo que representamos como (8,13). Los conos de los abetos de Noruega tienen 5 filas de escalas en una dirección y 3 en otra por lo tanto (5,3). El alerce común tiene (8,5), el alerce americano (5,3).

¿Cómo se forman las semillas del girasol? Se puede ver la espiral del girasol si se da seguimiento de cómo las masas pequeñas llamadas "primordia" se originan una por una (Fig.1).

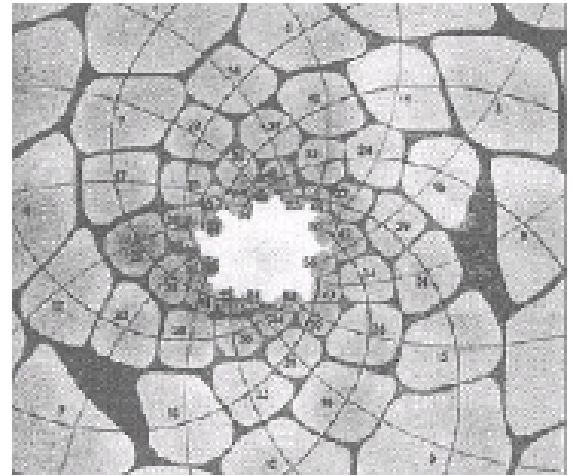


Fig.1: La separación interlineal de la primordia mostrada en una sección transversal de un brote.

Dado que la primordia aparece prematuramente con movimientos remotos, se puede juzgar el orden de aparición midiendo la distancia del "ápice" (organización de un área circular), así como se muestra en la Fig.2. La primordia más bien va evitando espaciarse a lo largo de una espiral estrechamente enrollada, llamada "espiral generativa". El ángulo entre la primordia contigua (por ejemplo, los ángulos entre las primordias numeradas 29 y 30 ó 30 y 31, etcétera.) cuando es visto desde el ápice, se le llama ángulo de divergencia y toma generalmente un valor aproximado a 137.5° . El ángulo dorado es exactamente igual a $137.50776\dots^\circ$. El ángulo dorado se cierra para ser el único ángulo al cual se embanan las semillas de la manera más eficiente sin tener boquetes y cuando lo hacen ambas familias de espirales ocurren simultáneamente. Es posible calcular este ángulo tomando números consecutivos en la serie de Fibonacci como, por ejemplo, $a_8 = 34$ y $a_9 = 55$. Formando la fracción correspondiente $\frac{a_8}{a_9} = \frac{34}{55}$ y multiplicado por 360° el cual es aproximadamente igual a 225.5° . Uno puede medir ángulos externa o internamente, y como 225.5° es más grande que 180° se debe restar de 360° lo que da el ángulo 137.5° . Así

$$\frac{34}{55} \times 360^\circ = 225.5^\circ \quad 360^\circ - 225.5^\circ = 137.5^\circ \quad (5)$$

más exactamente, en vez de a_9 en la Ec.(5), uno debe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61834\dots$$

que produce el valor límite exacto $137.50776\dots^\circ$ (ver Apéndice)

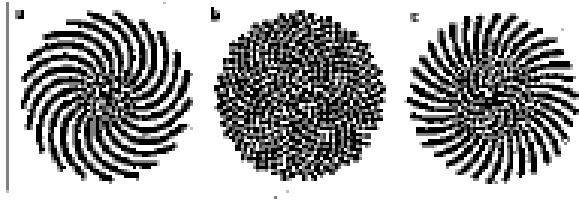


Fig.2: Embalamiento creado por ángulos divergentes (a) 137.3° , (b) 137.5° (ángulo dorado) y (c) 137.6° .

Como podemos ver, el caso (b) es la manera más eficiente de embalar los discos. Se puede decir que los girasoles hacen uso de las matemáticas basadas en los números de Fibonacci para obtener el número máximo de semillas.

Cuando se habla acerca de las matemáticas empleadas en el mundo de las plantas, no debemos olvidar que los fractales pueden ser vistos con bastante frecuencia en este mundo²⁾. Un fractal es una forma geométrica que tiene estructura intrincada en todas las escalas de su ampliación. Los fractales más simples son similares a sí mismos, su forma está montada de copias de sí mismos y ellos se generan por una regla determinista simple. En la Naturaleza podemos encontrar muchísimos de estos objetos, tales como deltas de ríos, montañas, paisajes de cráteres lunares, bahías, acantilados de continentes, sistemas de vasos sanguíneos, y sistemas nerviosos. El mundo de las plantas se halla lleno de formas que pueden estar razonablemente modelados por fractales³⁾. (Fig.3) Hojas de helecho y una sección transversal de coliflor son buenos ejemplos de tales fractales.



Fig.3 La configuración de un fractal visto en una hoja de helecho.

De esta manera, las matemáticas están ocultas en todas partes, en el mundo de las plantas.

3. Patrones de rayas en los animales

En el mundo de los animales, podemos hallar patrones sorpresivamente variados, tales como los de las conchas de mar, alas de mariposas, de pescados tropicales, de tigres y de leopardos etc. Fue Alan Turing el primero en aplicar las matemáticas para explicar el aspecto de los patrones de aquellos animales⁴⁾. Él era un genio en el campo de la lógica matemática, jugó un papel histórico como pionero, en cuanto a la realización de una computadora, y desarrolló la teoría en el límite de la posibilidad computacional. Turing conjeturó que debe existir ciertamente algún principio de unificación en la formación de los patrones de los animales. Él argumentó que todas las formaciones de los patrones de los animales son causadas por las reacciones de los materiales químicos, los cuales se propagan obedeciendo a las llamadas ecuaciones de reacción de difusión (onda), las que se leen como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= f(X, Y) + m(X_{r-1} - 2X_r + X_{r+1}) \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= g(X, Y) + n(Y_{r-1} - 2Y_r + Y_{r+1}) \end{aligned} \quad (7)$$

donde $r=1,2,\dots,N$, y X, Y se refiere a un morfógen, m, n a los coeficientes de difusión y a una posición de la célula. Por ejemplo, los peces ángel que son peces tropicales, tienen un hermoso patrón con rayas verticales (Fig.4).

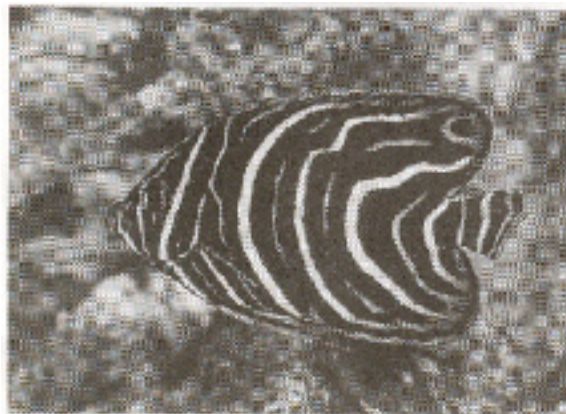


Fig.4 El pez ángel Pomacanthus semicirculatus.

Ciertamente esas rayas tendrían que moverse, si este patrón se produce según la hipótesis de Turing. Esto se convirtió en una razón, y una visión negativa, dividida contra la hipótesis de Turing por cierto periodo de tiempo.

Sin embargo, en 1995, dos científicos japoneses, Kondo y Asai, descubrieron que durante un periodo de varios meses, las rayas en los peces ángel, se desplazan en su superficie (5). Observaron que ciertos defectos que se asemejan a las "dislocaciones" en la física, con un patrón de rayas regularmente espaciadas, se dividen hacia arriba y se reacomodan de manera característica: exactamente de la forma que las ecuaciones de Turing predijeron.

Las conchas de mar son de gran belleza y diversidad. Tales patrones en las conchas, pueden ser generados como sistemas dinámicos por la interacción de dos materiales químicos, activadores e inhibidores. El siguiente tipo de ecuaciones de reacción-difusión de Turing, describen una posible interacción entre el activador autocatalítico $a(x)$ y su antagonista, el inhibidor $b(x)$ y relacionan el cambio de la concentración por unidad de tiempo de ambas sustancias como una función de la concentración presente (6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= s \left(\frac{a^2}{b} + b_a \right) - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= s a^2 - r_b b + b_b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde t es el tiempo, x es la coordenada espacial, D_a y D_b son los coeficientes de difusión, r_a y r_b son los índices del decaimiento de a y b , s es la densidad de fuente, y finalmente b_a y b_b son la producción del activador básico y la producción del inhibidor básico, respectivamente. De acuerdo con la simulación por computadora, los patrones de las conchas de mar son formados por la diferencia en los índices de difusión de estos dos químicos, como se muestra en la Fig.5.

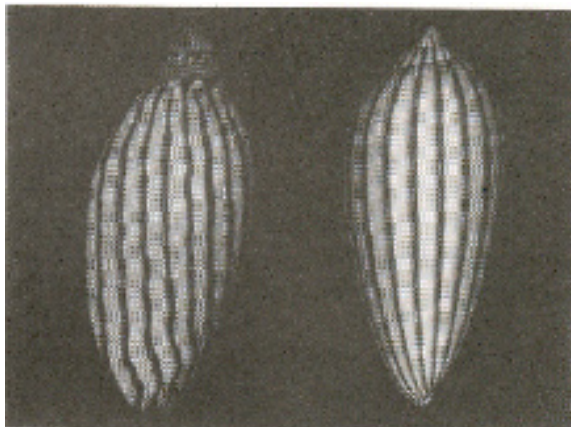


Fig.5 Una real concha de mar *Amoria elhoti* a la izquierda y una simu-

lación por computadora a la derecha.

Aunque el problema de las formaciones de los patrones de rayas de los animales no puede considerarse totalmente resuelto, todavía, la hipótesis de Turing está jugando nuevamente un papel crucial, al ser revisada de una forma más moderna. De esta manera, las matemáticas ofrecen una herramienta imprescindible, para obtener un entendimiento más profundo de la formación de los patrones en el mundo de los animales.

4. Organización colectiva de grandes grupos de animales

Las bandadas de aves generalmente exhiben patrones impresionantes del comportamiento colectivo. Los Cardumen crean movimientos arremolinados en los océanos tropicales. Grandes manadas de ñúes viajan por cientos de kilómetros a través de la sabana Africana, siguiendo las pistas de migraciones antiguas. En los bosques tropicales, largas hileras de hormigas llevan alimentos o materiales de construcción hacia su hormiguero. Con bastante frecuencia colonias de animales que viven en sociedad, manifiestan altos patrones de comportamiento extremadamente organizado tales como la misteriosa conducta colectiva de termitas que proveen sus nidos de "aire acondicionado".

¿Cómo puede uno explicar estos remarcados comportamientos de los grandes grupos de animales? Los términos como "instinto" son demasiado imprecisos y uno apenas es conducido para profundizar en el misterio. También parece ser improbable que en los genes de las aves exista una instrucción genética que les ordene "formen bandadas". Más bien pudiese ser que en el proceso evolutivo de cientos de millones de años, unas cuantas reglas para formar bandadas fueron construidas en los genes de los animales. Los comportamientos de hacer una bandada son considerados como un resultado de esas reglas. Sorprendentemente los variados patrones de comportamiento de los animales, pueden ser de hecho generados por las reglas de las matemáticas abstractas que la física proporciona.

C. Reynolds pudo generar el comportamiento de una bandada de aves por medio de una simulación por computadora (caricatura animada), en la cual los animales llamados "boid" vuelan en un ambiente virtual (7). Él asumió las siguientes sencillas reglas como una interacción local entre los individuos del boid.

- 1) Cada individuo en el boid intenta mantener la mejor distancia apropiada de otras aves en el ambiente.
- 2) Cada individuo intenta emparejarse a una dirección de acuerdo con las aves vecinas.
- 3) Cada individuo intenta moverse hacia el centro de la masa de las aves vecinas.

Ninguna de estas reglas dicta la "formación de bandadas". Sin embargo una simulación por computadora, basada en estas simples reglas, genera comportamientos los cuales se asemejan a una bandada de aves. De esta manera, los comportamientos colectivos de animales parecen ser producidos como resultado de las reglas abstractas, a saber una clase de matemáticas. Este ejemplo puede dar una alusión en la construcción de modelos matemáticos con base en la lógica que está oculta en sistemas complejos tales como la vida, sistemas sociales, y ecosistema.

Resumen

Hemos revisado brevemente la visión de que la lógica matemática está encubierta detrás de los fenómenos de la vida al introducir algunos ejemplos del mundo de plantas florales, los patrones de rayas de los animales y del orden del comportamiento colectivo de los animales. Tal lógica matemática debe complementar el "dominio del ADN" arrollando las actuales ciencias de la vida. Debajo de los genes yace el rico mundo físico con su variedad de patrones, formas y sistemas. Las matemáticas son imprescindibles para el entendimiento de los aspectos microscópicos del mundo vivo también como para el ADN, proteínas, células, etcétera. Las leyes matemáticas de la química y la física controlan una respuesta de los organismos a sus instrucciones genéticas.

Incluso hay buenas razones para suponer unas nuevas matemáticas que son aquellas para el mundo vivo como una teoría unificada de las leyes matemáticas profundas detrás del crecimiento y formas¹⁾. Las nuevas matemáticas tendrían importancia en los desarrollos recientes tales como complejidad, caos, fractales, algoritmos genéticos, redes nerviosas, y el autómata celular.

Bibliografía

- 1) I. STEWART.
Life's Other Secrets--The new mathematics of the living world, John Wiley & Sons, Inc.
- 2) B. B. MANDELROT.
The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and

Co.

- 3) P. PRUSINKIEWICZ AND A. LINDENMAYER.
The Algorithmic Beauty of Plants, Springer-Verlag.
- 4) A. M. TURING, PHIL.
Trans.R.Soc.B237,37(1952).
- 5) S. KONDO AND R. ASAI.
Nature 376,765(1995).
- 6) H. MEINHARDT
The Algorithmic Beauty of Sea Shells, Springer-Verlag.
- 7) C. W. REYNOLDS
Computer Graphics 21,25(1987).

Apéndice

Consideremos la serie a_n que satisface la siguiente relación recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3) \quad (A.1)$$

donde los dos primeros términos son $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Usando las constantes α y β con $|\beta| < 1$ transformamos la Eq.(A.1) como sigue:

$$a_n - a a_{n-1} = b(a_{n-1} - a a_{n-2}) \quad (n \geq 3) \quad (A.2)$$

Entonces α y β satisface la relación:

$$\alpha + \beta = 1 \text{ y } a\beta = -1 \quad (A.3)$$

Así tomando en cuenta la condición: $|\beta| < 1$ obtenemos

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (A.4)$$

Usando la Eq (A.2) la siguiente relación para a_n puede ser derivada:

$$a_n - a a_{n-1} = b^{n-2} A, (n \geq 2)$$

donde

$$A = (a_2 - a a_1)$$

La relación recursiva (A.5) produce:

$$a_2 - a a_1 = A \Rightarrow a_2 = a a_1 + A$$

$$a_3 - a a_2 = bA \Rightarrow a_3 = a^2 a_1 + (b + a)A$$

$$a_4 - a a_3 = b^2 A \Rightarrow a_4 = a^3 a_1 + (b^2 + b + a^2)A$$

$$a_n - a a_{n-1} = b^{n-2} A \Rightarrow a_n = a^{n-1} a_1 + (b^{n-2} + b^{n-3} a + \dots + b^{n-3} + a^{n-2})A$$

Consecuentemente

$$a_n = a^{n-1} a_1 + \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b - a} A \quad (n \geq 1)$$

Tomando en cuenta $A = a_2 - a a_1$ obtenemos

$$a_n = \frac{(b^{n-1} - a^{n-1})a_2 + (b^{n-2} - a^{n-2})a_1}{b - a} \quad (n \geq 1) \quad (\text{A.5})$$

Ahora consideremos la siguiente relación de los dos

términos vecinos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{(b^{n-2} - a^{n-2})a_2 + (b^{n-3} - a^{n-3})a_1}{(b^{n-1} - a^{n-1})a_2 + (b^{n-2} - a^{n-2})a_1} \\ &= \frac{\{b/a\}^{n-2} - 1\} a_2 + \{1/b \cdot (b/a)^{n-2} - 1/a\} a_1}{\{b(b/a)^{n-2} - a\} a_2 + \{b/a\}^{n-2} - 1\} a_1} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$ obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\text{A.6})$$