Determinación matemática de distancias con equipo GPS

El presente trabajo pretende dar a conocer de forma un tanto sencilla, la utilización de modelos matemáticos en aspectos geodésicos, el objetivo de dar a conocer la formulación de ecuaciones de simple, doble y triple diferencia, fundamentales para la determinación de las coordenadas de puntos terrestres utilizando equipo GPS. Dentro de la aplicación de la teoría de ecuaciones en trabajos geodésicos, la solución de éstas se obtiene mediante software especial.

Comenzaremos a partir de la Ecuación de Fase de una onda electromagnética que se propaga en el espacio en un tiempo t en un modelo ideal:

$$\varphi = 2\pi f\left[\frac{\rho}{c} - t\right] + 2\pi a \qquad (1)$$

donde:

φ = Fase,
ρ = Distancia recorrida,
f = Frecuencia,
a = Número entero,
c = Velocidad de la luz en el vacío,
t = Tiempo.

Además, la frecuencia se relaciona con la longitud de onda mediante la expresión:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

sustituyendo la expresión anterior en (1) obtenemos:

$$\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda}\left(\frac{\rho}{c} - t\right) + 2\pi a = \frac{2\pi\rho}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda} + 2\pi a = \frac{2\pi\rho - 2\pi ct + 2\pi\lambda a}{\lambda} = \frac{2\pi(\rho - ct + \lambda a)}{\lambda} =$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(\rho - ct + \lambda a) \qquad (2)$$

Como las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, podemos establecer la siguiente relación:

$$c = \frac{\rho}{t} \qquad (3)$$

donde el tiempo de recorrido de la onda es la diferencia entre el tiempo del receptor en el momento de recibir la señal y el tiempo del satélite al emitirla, así:

$$t = t_r - t^s \qquad (4)$$

donde:

t_r = tiempo del receptor

t^s = tiempo del satélite

Sustituyendo (4) en (3) obtenemos:

$$c = \frac{\rho}{t_r - t^s} \qquad t_r - t^s = \frac{\rho}{c} \qquad \therefore$$

$$t_r = \frac{\rho}{c} + t^s \qquad (5)$$

Si utilizamos el momento de emisión $\rho = 0$ y $t = t^s$, de modo que :

$$\varphi_E = \frac{2\pi}{\lambda}\left(0 - ct^s + \lambda a\right) = \qquad \varphi_E = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-ct^s + \lambda a\right)$$

Esta ecuación para el instante de la recepción $\rho = \rho$ y $t = t_r$, se transforma en:

$$\varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\rho - ct_r + \lambda a\right)$$

Sustituyendo (5) en la expresión anterior:

$$\varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho - c\left(\frac{\rho}{c} + t^s\right) + \lambda a\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho - \rho - ct^s + \lambda a\right] =$$

$$\varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-ct^s + \lambda a\right)$$

Si tenemos $\varphi_E = \varphi_R$, entonces los tiempos de satélite y receptor se miden con los relojes incorporados a ambos, por lo que la incógnita principal en (2) es ρ, es decir, la distancia entre satélite y receptor (fig. 2). Es importante recordar que, puesto que el índice de refracción de la atmósfera es mayor que la unidad, la velocidad de la luz en este medio difiere de la velocidad en el vacío; expresándose como:

$$c = c_A - \delta c$$

donde:

c_A = Velocidad de la luz en la atmósfera.

δc = Variación infinitesimal en la velocidad de la luz, debida a la presencia de la atmósfera.

Por lo anterior, el término $\frac{\rho}{c}$ de la ecuación (5) queda:

siendo δc un infinitesimal, $(\delta c)^2$ se considera cero, así:

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\rho}{c_A} + \rho\frac{\delta_c}{c^2{}_A}$$

Hagamos a $\rho\frac{\delta_c}{c^2{}_A} = \Delta t$ (retardo en la propagación de la onda)

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\rho}{c_A} + \Delta t$$

la ecuación (5) queda:

$$t_r = t^s + \left(\frac{\rho}{c_A} + \Delta t\right) = t^s + \frac{\rho}{c_A} + \Delta t \quad \therefore \quad t^s = t_r - \frac{\rho}{c_A} - \Delta t,$$

donde la fase en el instante de la emisión será:

$$\varphi_E = \frac{2\pi}{\lambda}\left[-c\left(t_r - \frac{\rho}{c_A} - \Delta t\right) + \lambda a\right]$$

$$\varphi_E = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\rho - c_A t_r + c_A \Delta t + \lambda a\right)$$

Sean S_M y R_N el satélite M y el receptor N respectivamente. La diferencia de fases es:

$$\Delta_{MN} = \varphi_M\left(t^s\right) - \varphi_N\left(t_r\right) = \varphi_M\left(t_r - \frac{\rho_{MN}}{c_A} - \Delta t_{MN}\right) - \varphi_N\left(t_r\right) \qquad (6)$$

Hay que señalar que si bien los relojes tanto del satélite como del receptor son sumamente precisos, no puede asegurarse su sincronización; es decir para un mismo instante, pueden marcar tiempos diferentes. Sea w(t) el desfasamiento:

$$t_r = t^s + w(t) \qquad (7)$$

puede suponerse que w(t) es una cantidad pequeña. Aplicando el desarrollo de Taylor:

$$\rho_{MN}(t_r)=\rho_{MN}(t^s)+\left[\frac{d}{dt}(\rho_{MN})\right]w(t) \qquad (8)$$

Por tanto, la ecuación **(6)** puede deducirse:

$$\Delta_{MN}=2\pi a+\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{MN}(t)+\frac{d}{dt}(\rho_{MN})w(t)\right]-\left[2\pi(f_r+f^s)\right]$$

$$\left(t+w(t)+2\pi f^s\Delta t_{MN}\right) \qquad (9)$$

esta ecuación se cumple para el instante t; desconociéndose el valor del término $2\pi a$, al cual se le denomina AMBIGÜEDAD. La perturbación Δt_{MN} es también desconocida, pero puede ser modelada con aproximación.

Tomemos ahora el caso de dos receptores R_N, R_O que reciben señales del satélite M (Fig. 3). Para cada receptor puede formarse una ecuación como (9). Restemos ambas ecuaciones:

$$\Delta_{MNO}=2\pi(a_O-a_N)+\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{MO}(t)-\rho_{NN}(t)\right]+2\pi$$
$$\left(f^r{}_O-f_N{}^r\right)t+2\pi f^s\left[\Delta t_{MO}(t)-\Delta t_{MN}(t)\right]+$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{d}{dt}(\rho_{MO})w_O(t)-\frac{d}{dt}(\rho_{MN})w_O(t)\right]+$$
$$2\pi\left[f_N{}^r w_N(t)-f_o{}^r w_O(t)\right] \qquad (10)$$

la ecuación de esta forma se denomina de “simple diferencia”.

Analicemos el caso de dos receptores (R_N, R_O) captando simultáneamente señales de los satélites (S_L, S_M) . Formando las ecuaciones de simple diferencia y restándolas obtenemos:

$$\Delta_{MNO}-\Delta_{LNO}=2\pi(a_{NL}-a_{NM})-2\pi(a_{OL}-a_{OM})+$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{OL}(t)-\rho_{OM}(t)\right]-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{NL}(t)-\rho_{NM}(t)\right]-2\pi f$$
$$\left[\Delta t_{NL}-\Delta t_{NM}\right]+2\pi f\left[\Delta t_{OL}-\Delta t_{OM}\right]+$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{d}{dt}(\rho_{NL})(t)-\frac{d}{dt}(\rho_{NM})w_N(t)\right]-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{d}{dt}(\rho_{OL})(t)-\frac{d}{dt}(\rho_{OM})w_O(t)\right]$$

Las ecuaciones de esta forma se llaman “ecuaciones de doble diferencia”.

$$\Delta_{MNO}-\Delta_{LNO}=2\pi(a_{NL}-a_{NM})-2\pi(a_{OL}-a_{OM})+\frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\left[\rho_{OL}(t)-\rho_{OM}(t)\right]-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{NL}(t)-\rho_{NM}(t)\right]$$

Para este momento, todavía queda sin solución el problema de la determinación de la diferencia de ambigüedades. Para tal fin utilizamos las triples diferencias, que consisten en considerar dos instantes (t_1, t_2) y formando para cada uno las ecuaciones de doble diferencia. Restando estas se tienen:

$$S_{NOML}=\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{OL}(t_1)-\rho_{OM}(t_1)\right]-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{NL}(t_1)-\rho_{NM}(t_1)\right]\right\}-$$
$$\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{OL}(t_2)-\rho_{OM}(t_2)\right]-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\rho_{NL}(t_2)-\rho_{NM}(t_2)\right]\right\}$$

Tomando las triples diferencias como observaciones se puede estimar con exactitud la posición relativa de los receptores; y utilizando las ecuaciones de doble diferencia con el valor obtenido anteriormente, se calcula la diferencia de ambigüedades. Después, utilizando las diferencias simples o dobles se puede calcular el vector de posición entre los puntos N y O.

Las ecuaciones de simple o doble diferencia pueden linealizarse, y determinar así por mínimos cuadrados las incógnitas Dx, DY, DZ.:

$$\Delta x=X_N-X_O$$
$$\Delta Y=Y_N-Y_O$$
$$\Delta Z=Z_N-Z_O$$

Y las correcciones a los relojes $w_N(t)$ y $w_O(t)$ se obtiene la:

Ecuación Geodésica de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} w_N(t)&=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2 \\ w_O(t)&=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2 \end{aligned}\right\}\;,\ h$$

donde las constantes $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\ \beta_2$ se obtienen del mensaje de navegación del mismo GPS, además de utilizar los ajustes lineales por medio de mínimos cuadrados .

La obtención de las ecuaciones para la digitalización por medio de fractales, además del procesamiento de imágenes satelitales; da como resultado modelaciones estructurales para la identificación de datos específicos (Fig. 4).

Nota: Los dos primeros términos contienen las diferencias de ambigüedades, los términos tercero y cuar-

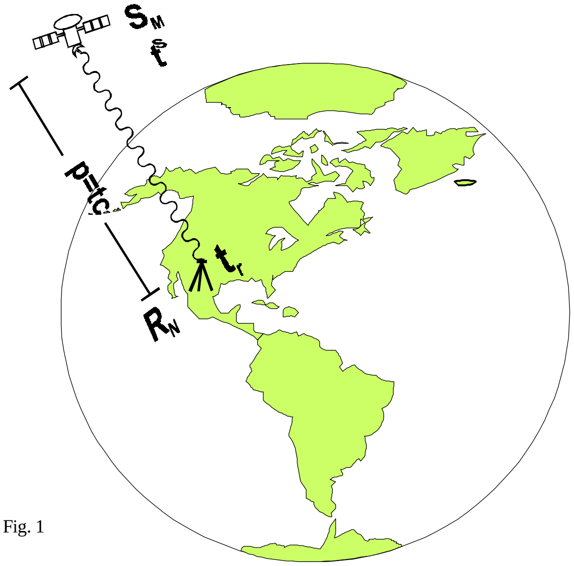

Fig. 1

to contienen las distancias entre satélites y receptores en el instante de la emisión. Los retardos atmosféricos (diferencias) están en los términos quinto y sexto. Si los receptores están cercanos entre sí se considera que los retardos atmosféricos son iguales en ambas estaciones, donde la diferencia entre los mismos se considera igual a cero. Si $w_N(t)$ y $w_O(t)$ son constantes durante la observación, la ecuación de doble diferencia se reduce a: *diferencial geodésica de primer orden*

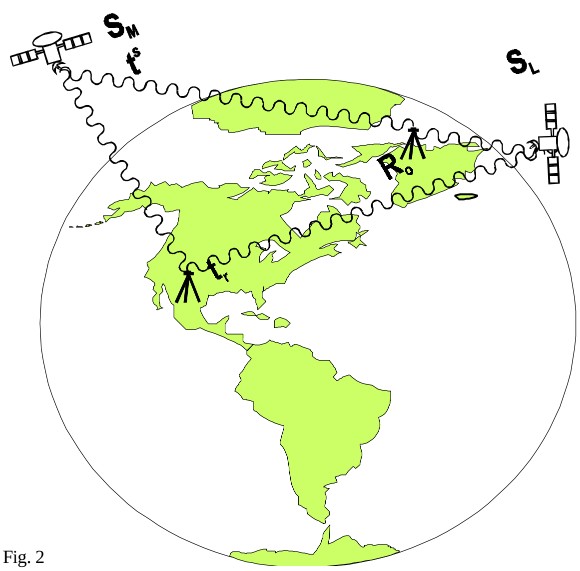

Fig. 2

Fig. 3

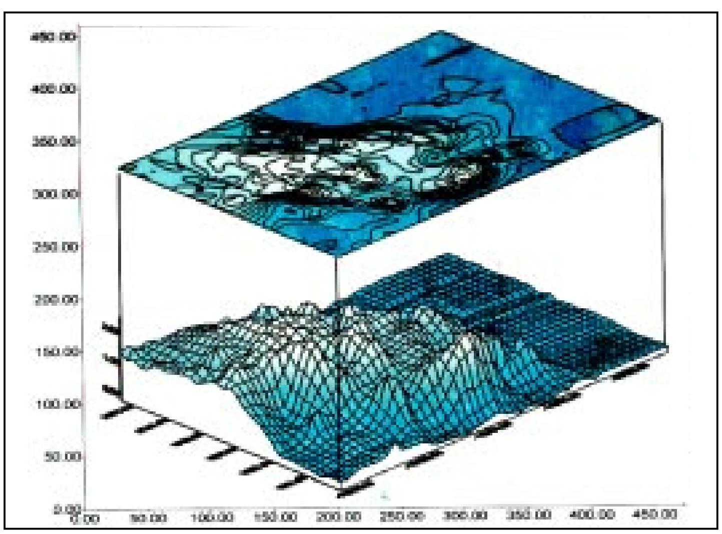

Fig. 4

Bibliografía:

Chane All.

1998 *Seysmology*. U.S. Geological Survey. U.S.A.

Hofmann, Lichtenegger and Collins

1997 *GPS Theory and Practice*. U.S.A.

Jia Wei

1998 *Earth and Rift*. C.S.I.C.Tokyo.

Wittes Turk

1997 *Teoría del Expansionismo*. España.

Rogelio Ramos Aguilar[1], Alejandro Rivera Domínguez[2], Alma Patricia Aguilar Villa[3]

[1] Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología-Puebla

[2] Secretaría de Gobernación de Puebla

[3]Instituto Tecnológico Superior de Atlixco

E-mail: rogelio_ramosa@yahoo.com

ardominguez@usa.net