UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Propiedades topológicas relativas en hiperespacios

Protocolo de tesis

Presenta
Fernando Fredy Bastida Arellanes

Director de Tesis
Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide

Codirector de Tesis
Dr. Jesús Díaz Reyes

Huajuapan de León, Oaxaca 2 de febrero de 2021

Índice

INTRODUCCIÓN

La temática de la tesis concierne a la rama de la Matemática denominada Topología, particularmente se estudian aspectos de la teoría de hiperespacios vía algunas propiedades topológicas relativas. A continuación explicamos brevemente esta relación.

En hiperespacios se sabe de la existencia del problema general: "conocer si alguna propiedad topológica $\mathcal{P}$ que posea un espacio X se preserva en alguno o en algunos de sus hiperespacios, y viceversa".

Existe una gran variedad de posibilidades de considerar la propiedad $\mathcal{P}$, por ejemplo, puede ser alguna propiedad topológica relativa, cierta propiedad dinámica, una propiedad selectiva, etc. En este proyecto de tesis nos hemos propuesto estudiar sólo propiedades topológicas relativas. A grandes rasgos, la teoría de las propiedades relativas versa sobre lo siguiente. Cada propiedad topológica $\mathcal{P}$ en un espacio X, puede generar una o más de una propiedad relativa de ella, digamos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$, que se formulan en términos de un subespacio Y de X, y que satisfacen la condición de que cuando $Y = X$, entonces, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \cdots = \mathcal{P}_n$. Entre algunas propiedades relativas que se han estudiado y han aportado grandes avances en topología, encontramos las que provienen de axiomas de separación, de axiomas de numerabilidad, de diferentes tipos de compacidad, de funciones cardinales, de selectibilidad, etc.

Ahora bien, en esta tesis pretendemos abordar el problema de hiperespacios descrito al inicio del presente apartado, restringiéndonos, debido a lo amplio del tema, solamente a las propiedades topológicas relativas concernientes a axiomas de separación y compacidad. Cabe señalar que el estudio de propiedades relativas en hiperespacios es un tema actual de investigación, el cual ha brindado frutos interesantes.

En suma, dada su importancia, en esta tesis se pretende realizar un análisis exhaustivo de las propiedades relativas en axiomas de separación y compacidad, con miras a aplicarlo a algunos hiperespacios. El interés de realizar este trabajo radica en que nuestros alumnos y profesores tengan al alcance una memoria autocontenida que contenga los resultados fundamentales y más sobresalientes de estos temas.

De manera general, el trabajo de tesis está dividido en tres etapas. En la primera, estudiaremos las propiedades relativas de los axiomas de separación T_1, T_2, regularidad y normalidad, y algunas formas relativas de compacidad. En la segunda etapa, para algún espacio topológico X, se revisarán los resultados básicos y necesarios de su hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$, así como de su subespacio Y^+, dotados con la topología de Vietoris. Finalmente, en la tercera etapa conjuntaremos los conocimientos adquiridos en las dos etapas anteriores y procederemos al análisis de las propiedades relativas mencionadas previamente, en dichos hiperespacios.

1. Marco teórico

La presente tesis se desarrolla en el área de la Matemática llamada Topología. Los temas que se examinan en este trabajo forman parte esencialmente de dos de sus líneas de estudio, a saber, los hiperespacios y las propiedades topológicas relativas.

La teoría de los hiperespacios tiene sus orígenes a principios del Siglo XX. Fueron F. Hausdorff [10] y L. Vietoris [19] quienes comienzan el desarrollo de esta teoría. Uno de los primeros hiperespacios que se definieron para un espacio topológico X fue el de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, denotado por $\mathrm{CL}(X)$. Esto es,

$$\mathrm{CL}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

A $\mathrm{CL}(X)$ se le considera con la *topología de Vietoris*, τ_V.

Para definir dicha topología, consideremos lo siguiente. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de X, $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle$ denota el subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$ definido como sigue:

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{k} A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}.$$

La topología de Vietoris es la topología generada por la familia:

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_k \text{ son subconjuntos abiertos en } X \text{ y } k \in \mathbb{N}\}.$$

Una demostración de que $\mathcal{B}_V$ es una base para τ_V, se puede consultar en [13, Teorema 1.2].

Si bien el hiperespacio $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es un espacio interesante de estudiar, también lo son sus subespacios, y en esta tesis en particular, el siguiente es de nuestro interés. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto no cerrado de X. Se define el subespacio de $\mathrm{CL}(X)$:

$$Y^+ = \{F \subseteq Y : F \text{ es cerrado en } X\}.$$

La definición de este espacio originalmente fue presentada en [1] y se le denotó por $\mathcal{F}(Y, X)$. Sin embargo, por conveniencia, usamos el símbolo Y^+, como se utiliza en [7].

Es importante destacar que se pueden definir más hiperespacios a partir de un mismo espacio X. Por mencionar algunos, $C(X)$, el hiperespacio de todos los subconjuntos conexos de X; $F_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, el hiperespacio de todos los subconjuntos de X que tienen a lo más n puntos, etc. Podríamos englobar todos los hiperespacios de X (o muchos de ellos) con el símbolo genérico $H(X)$. A su vez, también es necesario indicar que a los hiperespacios se les puede dotar de otras topologías y no sólo la de Vietoris. Por ejemplo, la topología de Fell, la topología *hit-and-miss*, etc. En este trabajo de tesis nos enfocamos al estudio de los hiperespacios $\mathrm{CL}(X)$ y Y^+ con la topología de Vietoris.

Por otro lado, es conocido que dentro de la Teoría de hiperespacios se tiene un problema de índole general. Lo destacamos a continuación.

($*$) Dados un espacio topológico (X, τ) y un hiperespacio de X, $(H(X), \tau_V)$, estudiar las posibles conexiones entre las proposiciones siguientes:

(1) (X, τ) tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
(2) $(H(X), \tau_V)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

para alguna propiedad topológica $\mathcal{P}$.

El problema en ($*$) se interpreta de la siguiente manera. Si un espacio topológico X cumple o posee una cierta propiedad $\mathcal{P}$, entonces, como una buena tarea, se puede investigar si alguno de sus hiperespacios, $H(X)$, también preserva la propiedad $\mathcal{P}$, y recíprocamente, si un hiperespacio $H(X)$, satisface dicha propiedad, indagar si el espacio X también la posee.

Como ejemplo del problema ($*$) encontramos el siguiente resultado debido a E. Michael (vea [15, Teorema 4.9]), donde la propiedad $\mathcal{P}$ es de índole muy variada.

Teorema 1.1. Para un espacio topológico X se cumplen las siguientes propiedades.

1. Si X es T_1, entonces $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es T_1.
2. X es regular si y sólo si $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es Hausdorff.
3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) X es normal;
   (b) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es completamente regular;
   (c) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es regular.
4. X es compacto si y sólo si $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es compacto.
5. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) X es compacto y metrizable;
   (b) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es compacto y metrizable;
   (c) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es metrizable.

Por otra parte, a continuación hacemos un breve bosquejo de la otra línea de estudio en la que estamos interesados en el presente trabajo de tesis. A saber, la teoría de las propiedades topológicas relativas.

En [4], A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi, introducen una amplia gama de propiedades para un espacio topológico, a la cual actualmente se le denomina como teoría de propiedades topológicas relativas. En particular, en ese artículo fueron definidos varios tipos de propiedades relativas referentes a los axiomas de separación así como a la compacidad y a algunas de sus variantes. Una exposición sumaria de este tema puede encontrarse en [2].

Una propiedad topológica relativa se define para un espacio topológico X y un subespacio $Y \subseteq X$, y a grandes rasgos, es aquella que generaliza una propiedad global del espacio, en el siguiente sentido: cuando Y coincide con X, entonces la propiedad relativa debe ser la misma que la global. Se emplea el término *relativizar* una propiedad de X. Por ejemplo, una relativización de la compacidad es la siguiente.

DEFINICIÓN 1.2. Dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, decimos que Y es *compacto en* X si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita para Y.

Note que, efectivamente, si $Y = X$, estamos hablando de la propiedad usual de compacidad. Observe, además, que hemos dicho "una relativización de la compacidad" debido a que dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$, pueden existir $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ propiedades relativas de $\mathcal{P}$. Notemos otra versión relativa de la propiedad de compacidad.

DEFINICIÓN 1.3. Dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, decimos que Y es *internamente compacto en* X si cada conjunto $Z \subseteq Y$ cerrado en X, se tiene que Z es un espacio compacto.

Otros ejemplos de propiedades relativas de un espacio los encontramos en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.4. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

a) Y *es* T_1 *en* X si para cada punto $y \in Y$ el conjunto $\{y\}$ es cerrado en X.
b) Y *es Hausdorff en* X si cualesquiera dos puntos distintos y_1 y y_2 de Y pueden ser separados por conjuntos ajenos y abiertos en X.
c) Y *es fuertemente Hausdorff en* X si cualesquiera dos puntos distintos $y \in Y$ y $x \in X$ pueden ser separados por conjuntos ajenos y abiertos en X.
d) Y *es normal en* X si para cada par de conjuntos ajenos A y B cerrados en X, existen conjuntos ajenos U y V abiertos en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$.

Ahora recordemos el siguiente hecho de topología general.

TEOREMA 1.5. [8, Teorema 3.1.9] Sea X un espacio Hausdorff. Si X es compacto, entonces X es un espacio normal.

Resulta natural la pregunta: ¿es posible reemplazar en el Teorema 1.5 las propiedades de compacto y normal por alguna propiedad relativa? El siguiente teorema da una solución a esta cuestión.

TEOREMA 1.6. [2, Teorema 34] Sea X un espacio Hausdorff. Si Y es compacto en X, entonces Y es normal en X.

El Teorema 1.6 representa lo que llamamos *versiones relativas* del Teorema 1.5. En conclusión, un problema de interés en esta línea de estudio, es encontrar, en caso de que sea posible, versiones relativas de las versiones absolutas de los resultados en topología. La importancia de este problema recae en que cada versión relativa demostrada será una generalización del enunciado relativizado. Con todo esto queda mostrado el uso y la importancia del estudio de las propiedades relativas en espacios topológicos.

Ahora bien, una pregunta obligada es si se pueden atacar los problemas clásicos de hiperespacios vía propiedades topológicas relativas. Para precisar esta cuestión, consideremos la parte 4 del Teorema 1.1.

Teorema 1.7. Si X es un espacio topológico, entonces X es compacto si y sólo si $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es compacto.

Con esto, nos preguntamos si en el Teorema 1.7 la propiedad de compacidad puede ser reemplazada por una propiedad relativa de compacidad, ya sea X, en $\mathrm{CL}(X)$ o en algún otro hiperespacio. Restringiéndonos al subespacio Y^+ de $\mathrm{CL}(X)$, lo anterior se puede plantear de manera general como sigue (vea [7]).

Problema 1.8. Sean X un espacio topológico T_1 y Y un subconjunto no cerrado de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

(a) Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X;
(b) Y^+ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa.

Cabe señalar que al atender el Problema 1.8 se está haciendo un aporte al Problema $(*)$ que, como hemos mencionado, es de índole general en la teoría de los hiperespacios.

Terminamos esta sección mencionando que el lector interesado en temas de hiperespacios puede consultar las fuentes [11–17], en donde a su vez encontrará muchas otras referencias. Sin embargo, para la teoría de propiedades topológicas relativas sólo es posible encontrar estudios aislados y dados de manera muy general en [4] (en Ruso), [2] (exposición sumaria y rudimentaria). Conviene decir que con el paso de los años, se han introducido nuevas propiedades topológicas relativas, las cuales pueden ser consultadas en las referencias [3, 5, 6, 9, 18], por mencionar algunas.

2. Planteamiento del problema

El estudio del Problema 1.8, con la finalidad de realizar aportes nuevos, conlleva a poseer un amplio conocimiento de la teoría de las propiedades relativas topológicas y de la teoría de hiperespacios. Estas son ramas extensas de la topología que se estudian a través de libros especializados y de artículos de rigurosa investigación. Tanto alumnos como profesores, con mucho interés en estudiar estos temas, pero con poca experiencia en los mismos, se enfrentan con la dificultad de contar con material asequible de apoyo que les aproxime a disminuir la ausencia de conocimiento. Es evidente que esto resulta ser un problema cuando se aspira a realizar estudios de investigación con miras a un avance progresivo.

Por los motivos previamente expuestos, en el presente trabajo de tesis se pretende realizar una recopilación de los resultados que consideramos fundamentales y más sobresalientes de la teoría de propiedades topológicas relativas en hiperespacios, tomando como base el artículo de investigación [7], y presentándolos de manera conjunta, en una memoria autocontenida y detallada, con la finalidad de brindarle a los interesados, un material que contemple las bases para un mejor y mayor entendimiento del Problema 1.8.

3. Justificación

La Topología es básica en la formación de todo matemático pues es esencial en la fundamentación de una gran cantidad de nociones en diversas ramas de la Matemática. De igual forma, se conoce que sus aplicaciones en otras áreas del conocimiento son de gran relevancia. Una de las ramas de sumo interés dentro de la Topología es la teoría de hiperespacios que desde sus inicios ha sido estudiada por bastantes investigadores. No menos importante, está la teoría de propiedades topológicas relativas, que al igual que otras áreas, conlleva investigación actual. De este modo, al realizar una memoria autocontenida de los temas y problemas que se han planteado estudiar en esta tesis, se está cubriendo una ausencia de material básico y fundamental dentro de otros problemas de índole general en la Teoría de los hiperespacios. No está demás subrayar que esto garantiza disminuir la carencia de conocimiento en investigación que está a la vanguardia.

Por otra parte, la mayoría de las nociones que se contemplan analizar en este trabajo de tesis, no se atienden en un primer curso de Topología, por ello, consideramos que realizar este trabajo ayudará principalmente a la formación del estudiante y se tendrá una memoria autocontenida al alcance de los interesados en el tema.

Debemos destacar que solamente se cuenta con el trabajo [7] como guía y referencia para el estudio de las propiedades topológicas relativas en hiperespacios. De esta forma, cualquier aporte que se haga sobre el tema tendrá una gran ganancia en su desarrollo.

4. Objetivo general y objetivos específicos

A continuación presentamos los objetivos, tanto general como específicos, que se persiguen en este trabajo de tesis.

Objetivo general: Realizar una memoria autocontenida y detallada del análisis de los resultados fundamentales, concernientes a las propiedades relativas de los axiomas de separación y de compacidad, desde el punto de vista de la teoría de los hiperespacios.

Objetivos específicos:

1. Analizar las propiedades relativas de los axiomas de separación T_1, T_2, regularidad y normalidad.
2. Estudiar las propiedades relativas de la compacidad.
3. Realizar un estudio elemental del hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ y de su subespacio Y^+, ambos dotados con la topología de Vietoris τ_V.
4. Aplicar el conocimiento aprendido en los objetivos específicos 1 y 2 a la teoría de hiperespacios.

5. Metas

Las metas que se persiguen obtener para lograr los objetivos, tanto general como específicos planteados, son las siguientes.

Que el estudiante:

1. Recopile material bibliográfico suficiente tocante a los aspectos de topología general, propiedades relativas e hiperespacios.
2. Reafirme su formación en los temas principales de topología general, particularmente, en el área de hiperespacios y propiedades topológicas relativas.
3. Adquiera los conocimientos de las propiedades relativas de los axiomas de separación. Se incluye la escritura.
4. Obtenga los conocimientos de las propiedades relativas de compacidad. Se incluye la escritura.
5. Cuente con los conocimientos del hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ y de su subesapcio Y^+. Se incluye la escritura.
6. Redacte de manera detallada las aplicaciones de la teoría de propiedades relativas a los hiperespacios.
7. Colabore activamente, con sesiones periódicas, en el seminario de tesis *Temas de topología*, registrado ante la dirección de nuestro Instituto de Física y Matemáticas.

6. Metodología

Los métodos para realizar esta tesis serán prácticamente los mismos durante cada una de las etapas planteadas en las metas. Al ser un trabajo teórico, el alumno se encargará de preparar, lo más completo posible, la mayor cantidad de los temas a estudiar. Contará con el tiempo necesario para realizar exposiciones, de manera alternada, al director de tesis y al codirector, fungiendo estos como guías en la adecuada orientación y resolución de las dudas que le surjan al alumno.

Específicamente, el alumno procederá, tanto en sus exposiciones como en la escritura, de la siguiente forma. Comenzará el estudio de las propiedades topológicas relativas a los axiomas de separación y a la compacidad. Despúes se dedicará al análisis de la teoría fundamental de hiperespacios. Posteriormente conjuntará todo este conocimiento en el análisis detallado de las propiedades relativas en hiperespacios.

7. Índice preliminar

1. Introducción.
2. Preliminares.
   2.1 Nociones de teoría de conjuntos.
   2.2 Conceptos básicos de topología.
   2.3 Conceptos básicos de hiperespacios.
3. Axiomas relativos de separación y compacidad.
   3.1 Axiomas relativos T_1 y T_2 y sus propiedades.
   3.2 Axiomas de regularidad y normalidad y sus propiedades.
   3.3 Axiomas relativos de compacidad y propiedades.
4. Axiomas relativos de separación y compacidad en hiperespacios.
   4.1 El hiperespacio Y^+.
   4.2 Axiomas relativos T_1 y T_2 de Y^+ en $\mathrm{CL}(X)$.
   4.2 Axiomas relativos de regularidad y normalidad de Y^+ en $\mathrm{CL}(X)$.
   4.3 Axiomas relativos de compacidad de Y^+ en $\mathrm{CL}(X)$.
5. Conclusiones.
6. Bibliografía.

8. Cronograma de actividades

La siguiente gráfica de Gantt muestra la calendarización de las actividades que se desarrollarán para elaborar la tesis, durante el tiempo de trabajo.

Actividades	Dic 2020	Ene 2021	Feb 2021	Mar 2021	Abr 2021	May 2021	Jun 2021
Recopilación de material bibliográfico	■	■					
Estudio de nociones básicas de topología	■	■					
Estudio de axiomas relativos de separación			■	■	■		
Estudio de compacidad relativa				■	■	■	
Estudio de hiperespacios					■	■	■
Estudio de aplicaciones de las propiedades relativas en hiperespacios						■	■
Escritura de la tesis			■	■	■	■	■
Revisión del escrito						■	■
Defensa de tesis							■

A continuación indicamos las principales referencias en las que basamos nuestro trabajo.

Referencias

[1] A. V. Arhangel'skii, *A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 36 (1995), 305-325.

[2] A. V. Arhangel'skii, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology Appl. 70 (1996) 87-99.

[3] A. V. Arhangel'skii, *Relative normality and dense subspaces*, Topology Appl. 123 (2002) 27-36.

[4] A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi, *Beginnings of the theory of relative topological properties*, in: General Topology. Spaces and Mappings (MGU, Moscow, 1989) 3-48 (en ruso).

[5] A. V. Arhangel'skii y J. Tartir, *A characterization of compactness by a relative separation property*, Question and Answers in General Topology, 14 (1996) 49-52.

[6] D. Chodounský y E. Murtinová, *Internal normality and internal compactness*, Topology Appl. 155, (2008) 201-206.

[7] J. Díaz-Reyes, I. Martínez-Ruiz y A. Ramírez-Páramo, *Relative topological properties of hyperspaces*, Mathematica Slovaca, 69, 3 (2019), 675-684.

[8] R. Engelking, "General topology", Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[9] E. Grabner, G. Grabner, K. Miyazaki y J. Tartir *Relative star normal type*, Topology Appl. 153, (2005) 874-885.

[10] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[11] L'. Holá y J. Pelant, *Recent progress in hyperspace topologies*, en Recent progress in General Topology II, North-Holland, Amsterdam, (2002) 253-285.

[12] A. Illanes, "Hiperespacios de continuos", Aportaciones Matemáticas de la SMM, Textos 28, 2004.

[13] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., “Hyperspaces: fundamentals and recent advances”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.
[14] S. Macías, “Topics on Continua”, Second Edition, Springer, 2018.
[15] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.
[16] S. B. Nadler, Jr., “Continuum Theory”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
[17] S. B. Nadler, Jr., “Hyperspaces of sets. A text with research questions”, Aportaciones Matemáticas de la SMM, Textos 33, 2006.
[18] M. S. Sarsak y H. Z. Hdeib, *Relative strongly normal and relative normal subspaces*, International Mathematical Forum, 5, 12 (2010), 579-586.
[19] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 32 (1922), 258-280.

Acatlima, Huajuapan de León, Oax., a 2 de febrero de 2021.

Fernando Fredy Bastida Arellanes
Alumno

Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide
Director de tesis

Dr. Jesús Díaz Reyes
Codirector de tesis

JEFATURA DE CARRERA
LICENCIATURA EN
MATEMATICAS APLICADAS

Vo. Bo.
Dr. Franco Barragán Mendoza
Jefe de Carrera de la
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas