

## *Método de regularización por variación total, para el problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos.*

SILVIA REYES MORA <sup>a\*</sup>, YESSENIA HERNÁNDEZ PÉREZ. <sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Universidad Tecnológica de la Mixteca.

**Resumen.** Este artículo, da un panorama de como se aplica la teoría de regularización para la solución del problema de imágenes con dominios perdidos. Lo cual se logra a partir del análisis y descripción del problema real, obteniendo el planteamiento teórico y matemático, para plantearlo como un problema inverso, y se muestra que la solución al problema es equivalente a encontrar la solución del problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange.

**Palabras clave:** Problema inverso, Regularización, Imágenes con dominios perdidos, Minimización por variación total, método variacional.

**MSC2010:** 65Nxx, 65F22, 65D18, 68U10

## *Total variation regularization method, for the image inpainting reconstruction problem.*

**Abstract.** This article, gives an overview of how the regularization theory is applied to solve the problem of image inpainting. From the analysis and description of the real problem, obtaining the theoretical and mathematical approach, this problem is an inverse problem, and the solution to the problem is equivalent to finding the solution to the Neumann problem for the equation of Euler-Lagrange

**Keywords:** Inverse problem, Regularization, Image inpainting, Total Variation minimization, Variational Method.

---

\*E-mail: [integracion@matematicas.uis.edu.co](mailto:integracion@matematicas.uis.edu.co).

Received: fecha de recibido, Accepted: fecha de aceptación.

Para citar este artículo: nombre de los autores que aparecerá en el encabezado de las páginas pares, Título del artículo, *Rev. Integr. Temas Mat.* XX (XXXX), no. XX, YY-ZZ.

## 1. *Introducción.*

El objetivo del trabajo es dar una visión más completa de la relación existente entre las matemáticas y la computación en un tema de gran interés como lo es el problema de la reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, presentando la base matemática que lo sustenta y la evidencia que hace que este problema sea mal planteado en el sentido de Hadamard, por tal razón se analiza un método de regularización para aproximar a la solución mediante el método de regularización por variación total. El artículo se desarrolla de la manera siguiente: En el Capítulo 2 (Conceptos básicos), se exponen conceptos de imágenes digitales, así como las definiciones de: problema inverso, la delta de Dirac, cálculo variacional y regularización, los cuales son importantes para la comprensión y desarrollo del trabajo. En el Capítulo 3 (Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes), iniciamos explicando cuales son las imágenes con el problema de dominios perdidos, lo que nos ayuda a comprender el problema a resolver, posteriormente, damos pie al planteamiento matemático de nuestro problema. El cual resolveremos de manera teórica apoyándonos de los conceptos previos, donde veremos que el problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos es un problema inverso mal planteado, por lo que implementamos una estrategia de regularización, para lo cual utilizamos la regularización por variación total; lo que permite obtener una solución aproximada del problema, concluyendo que encontrar la solución al problema es equivalente a encontrar la solución del problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange. Finalmente en el Capítulo 4 (Solución numérica), desarrollamos el método numérico iterativo explícito de Euler-Lagrange para dar solución a la ecuación de Euler-Lagrange con condición de frontera de Neumann previamente obtenida.

## 2. *Conceptos básicos*

Se presentan los conceptos básicos acerca de las imágenes digitales y los conceptos de matemáticas que utilizamos para el desarrollo de los capítulos posteriores.

### 2.1. *Conceptos básicos de imágenes digitales.*

**Definición 2.1.** Matemáticamente, una imagen bidimensional  $u$  es una función de dos variables  $(x, y)$  es decir,

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{P}$$

$$u(x, y) = a, a \in \mathbb{P},$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $x$  e  $y$  son las coordenadas en el plano, que definen puntos sobre la imagen,  $\mathbb{P}$  es el conjunto de valores de las diferentes tonalidades de la imagen.

De esta definición se concluye que:

- $0 \leq u(x, y) < \infty, \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ .
- $\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) dx dy$  existe.

Una imagen digital está formada por un número finito de elementos llamados píxeles, donde cada píxel tiene una posición y un valor  $a$  que pertenece al conjunto  $\mathbb{P}$ , que es el conjunto de valores de las diferentes tonalidades que pueden estar presentes en la imagen, donde cada píxel tiene un valor que representa una tonalidad en la imagen. Así, la discretización de una imagen continua  $u(x, y)$  genera una imagen digital discreta  $u(m, n)$ , con  $M$  columnas y  $N$  filas, la cual es un conjunto de puntos en el plano, donde  $(m, n)$  son coordenadas discretas,  $0 \leq m < M$  y  $0 \leq n < N$ .

Nuestro trabajo se enfoca en imágenes monocromáticas particularmente en imágenes en escala de grises de 8 bits, por lo que el conjunto  $\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots, 2^8 - 1\} = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$  está formado por 256 tonalidades, donde 0 representa el color negro, 255 el color blanco y los valores entre 0 y 255 las diferentes tonalidades de grises del más oscuro 0 al más claro 255 que pueden estar presentes en la imagen, es decir el valor que puede tener un píxel sobre la imagen. Aunque en este trabajo se tratan principalmente imágenes monocromáticas, los procedimientos aquí descritos también aplican para imágenes a color, puesto que estos sólo se diferencian en que la intensidad de cada color se almacenan en matrices independientes ([5]).

### 3. Delta de Dirac.

La delta de Dirac denotada como  $\delta(x)$ , es empleada en el procesamiento de imágenes, debido a que puede representar de manera matemática, una fuente de luz puntual que ocupa una región pequeña, la cual actúa en un instante sobre un elemento de la imagen. La importancia de la delta de Dirac está en que puede tomar valores grandes en un intervalo muy pequeño, permitiendo modelar diferentes fenómenos; por ejemplo, la presión originada al aplicar una fuerza sobre un punto, al momento de golpear una pelota con un bate, en el golpe de un martillo, en el instante que actúa una fuente de luz sobre un elemento de la imagen, entre otros; por lo que una de sus características es ser cero en casi todo punto excepto en un punto donde su valor es infinito. La delta de Dirac tiene sus orígenes en 1930 y es Paul Dirac quien la investigó; por su parte, en 1948, Laurent Schwartz estableció la Delta como una distribución, es decir, un funcional que asigna a cada función un número real o complejo, con ciertas condiciones de continuidad. La distribución delta de Dirac se puede definir como ([12]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx,$$

donde  $\delta_\epsilon(x)$  es cualquier función de  $x$ , constante a pedazos, que satisface:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

y tal que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1.$$

La propiedad más importante de la delta de Dirac es la propiedad de muestreo integral, la cual dice que para cualquier función  $f$  continua en una vecindad del origen se cumple

que:

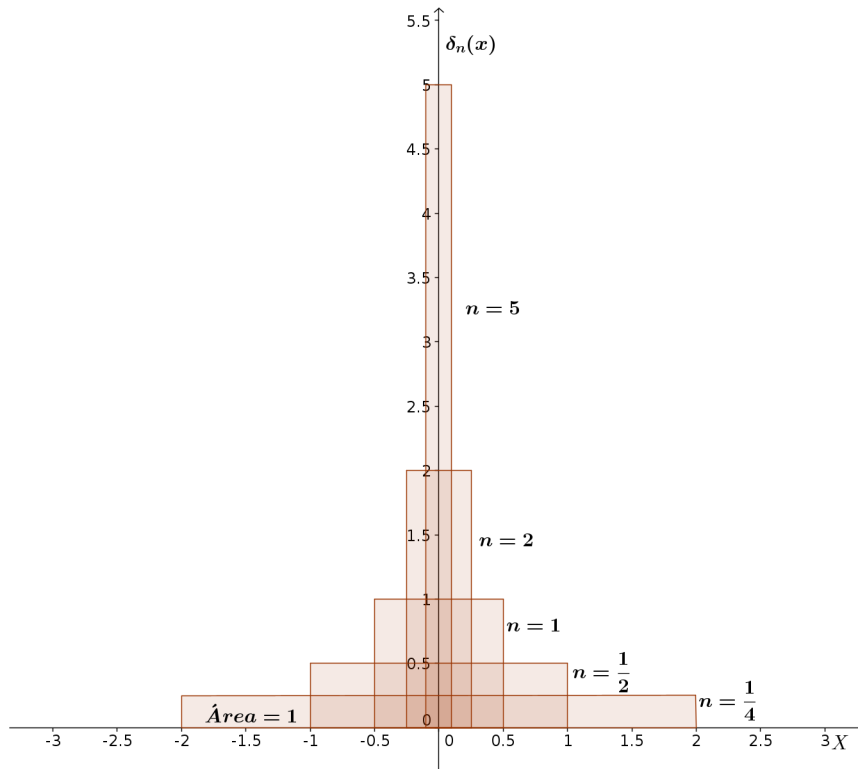
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0); \quad (1)$$

por tal la  $\delta(x)$  es considerada una distribución o función generalizada la cual posee ciertas propiedades. Existen diferentes sucesiones  $\delta_\epsilon$  para representar a la delta, una de ellas se mostrará en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 3.1.** Consideremos la sucesión de funciones siguiente:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2n}, \quad n > 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como podemos ver en la Figura 1, cuanto más grande es el valor de  $n$ , el área bajo la curva de la función se parece a un rectángulo cada vez más angosto con respecto a su base y de mayor altura, cabe resaltar que el área bajo la curva de  $\delta_n(x)$  siempre es uno.



**Figura 1.** Representación para  $n$  funciones de la  $\delta_n$ . Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, la distribución delta de Dirac satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n} \right) = 1, \quad n > 0.$$

De lo anterior, podemos definir la distribución delta de Dirac como:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x). \quad (2)$$

Así, para  $n = 1, 2, \dots$ , se pueden construir funciones  $\delta_n$ , las cuales se aproximan cada vez más a las propiedades que definen a la delta. Como observamos una distribución delta describe adecuadamente a los fenómenos que presentan impulsos en ciertos puntos.

El hecho de considerar una función generalizada para representar una imagen, es debido a que una imagen puede ser considerada una función sobre un conjunto acotado.

### 3.2. Cálculo de variaciones.

En este trabajo, el cálculo variacional nos permite encontrar  $u$  que minimice el modelo de la regularización por variación total para el problema de dominios perdidos.

El cálculo variacional es el campo del cálculo que se ocupa de funciones en espacios vectoriales. Un problema variacional es aquel que nos permite encontrar el valor máximo o mínimo de un funcional continuo  $J$  definido sobre un espacio de funciones  $F$ .

**Definición 3.2.** Dado  $F$  un espacio de funciones, un funcional  $J$  se define como:

$$J : F \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u = J(u).$$

A nosotros nos interesa calcular el mínimo de un funcional, es decir nos interesa saber la primera variación del funcional.

**Definición 3.3.** La primera variación del funcional  $J$  en el punto  $u$  y en la dirección  $\omega \in F$  se define como:

$$\delta J(u; \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\omega). \quad (3)$$

### 3.3. Problema inverso.

Nuestro interés en los diversos fenómenos de nuestro entorno nos llevan a resolver problemas en los que conocemos las causas y necesitamos conocer las consecuencias; pero también conocer las causas a partir de los efectos observados. En este contexto se presentan los llamados problemas directos y los problemas inversos, los cuales no tienen una definición estricta, pero si tienen un concepto general en la comunidad científica.

Podemos decir que un problema directo consiste en hallar un resultado o un efecto  $y = Kx$ , a partir del conocimiento de una causa  $x$  y del proceso o modelo  $K$ .

De esta forma, cada problema directo sugiere dos problemas inversos:

- Hallar la causa  $x$  a partir del conocimiento del efecto  $y$  y del modelo  $K$ .
- Hallar el modelo  $K$ , a partir del conocimiento de una cantidad considerable de causas y efectos. Este se llama problema inverso de identificación del modelo  $K$ .

### 3.4. Problema bien planteado.

A los problemas inversos o a los problemas directos los podemos clasificar como problemas bien planteados o problemas mal planteados en sentido de Hadamard. Matemáticamente formulamos la definición de buen planteamiento como sigue:

**Definición 3.4.** Sean  $X, Y$  espacios normados y  $K : X \rightarrow Y$  un operador (que puede ser lineal o no lineal). El problema inverso de hallar  $x$  a partir del conocimiento de  $K$  e  $y$ , que se escribe como  $Kx = y$ , es bien planteado si satisface:

1.  $\forall y \in Y$ , existe al menos un  $x \in X$  tal que  $Kx = y$ ; Existencia.
2.  $\forall y \in Y$ , existe a lo más un  $x \in X$  tal que  $Kx = y$ ; Unicidad.
3. La solución  $x$  depende continuamente de  $y$ , es decir para cada sucesión  $\{x_n\} \subset X$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} Kx_n = Kx$ , se cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ; Estabilidad.

Las ecuaciones que no cumplan al menos una de estas propiedades son llamadas mal planteadas ([7]).

**Ejemplo 3.5.** Consideraremos la ecuación de Fredholm de primer tipo definida como:

$$\int_c^d K(x, y)u(y)dy = d(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (4)$$

donde  $K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua,  $d$  una función continua en  $[a, b]$  y  $u$  una función continua en  $[c, d]$ ; el problema consiste en determinar una función  $u$  que satisfaga la ecuación (4), a partir de los datos conocidos  $K$  y  $d$ , el cual es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard. Considerando la relación  $Kx = y$ , dada en el planteamiento (??) y de la definición de buen planteamiento tenemos que  $K : X \rightarrow Y$  es el operador integral que relaciona el espacio  $X = \mathcal{C}[c, d]$  y el espacio  $Y = \mathcal{C}[a, b]$ , donde  $X$  e  $Y$  están dotados de la norma infinito:

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Este mal planteamiento del problema se debe a que el problema es inestable. Una forma de verificarlo es mostrando la existencia de una sucesión convergente  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  tal que  $\|d_n - d_0\|_\infty \rightarrow 0$  pero que  $\|u_n - u_0\|_\infty \not\rightarrow 0$ . Para ello consideraremos la siguiente sucesión:

$$u_n(y) = u_0(y) + n \cos(n^2 y), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

tal que:

$$d_n(x) = \int_c^d K(x, y)u_n(y)dy, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Luego calculando:

$$\|d_n - d_0\|_\infty.$$

Por una parte tenemos:

$$\begin{aligned}
 |d_n(x) - d_0(x)| &= \left| \int_c^d K(x, y)u_n(y)dy - \int_c^d K(x, y)u_0(y)dy \right| \\
 &= \left| \int_c^d K(x, y)(u_n(y) - u_0(y))dy \right| \\
 &= \left| \int_c^d K(x, y)(u_0(y) + n\cos(n^2y) - u_0(y))dy \right| \\
 &= \left| \int_c^d K(x, y)n\cos(n^2y)dy \right|
 \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
 &= \left| \left[ \frac{1}{n}K(x, y)\text{sen}(n^2y) \right]_c^d - \frac{1}{n} \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \left( [K(x, y)\text{sen}(n^2y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| [K(x, y)\text{sen}(n^2y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right|.
 \end{aligned}$$

Así:

$$\|d_n - d_0\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| [K(x, y)\text{sen}(n^2y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right|,$$

luego:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| [K(x, y)\text{sen}(n^2y)]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| K(x, d)\text{sen}(n^2d) - K(x, c)\text{sen}(n^2c) - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right|,
 \end{aligned}$$

por desigualdad triangular:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( |K(x, d)\text{sen}(n^2d)| + |K(x, c)\text{sen}(n^2c)| + \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2y)dy \right| \right),$$

como  $K$  es continuo sobre un compacto, existe un número positivo  $M$  tal que  $|K(x, y)| \leq M$ ,  $\forall x, y$ , también se sabe que  $|\text{sen } x| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ , por lo tanto concluimos que:

$$|K(x, d)\text{sen}(n^2d)| \leq c_1 \quad \text{y} \quad |K(x, c)\text{sen}(n^2c)| \leq c_2,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Luego tenemos que:

$$\left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \leq \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} dy \right|,$$

por una parte tenemos  $\left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \right| \leq N$  luego,

$$\left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} dy \right| \leq N(d - c).$$

Así concluimos que:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( |K(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d)| + |K(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c)| + \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \right), \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (c_1 + c_2 + N) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V = 0, \end{aligned}$$

donde  $V = c_1 + c_2 + N$  es una constante, así para  $n$  suficientemente grande  $d_0$  y  $d_n$  están cerca. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(y) - u_0(y)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{y \in [c, d]} |n \cos(n^2 y)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n |\cos(n^2 y)| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como podemos observar un pequeño error en los datos, produce un gran error en la solución exacta  $u$ , así nuestro problema inverso es inestable, por lo cual, dicho problema es mal planteado.

Una forma de resolver este tipo de problemas es por medio de una estrategia de regularización, donde la idea principal es aproximar el problema mal planteado mediante una familia de problemas bien planteados ([7]); así el objetivo es encontrar una familia de operadores acotados  $R_\alpha : Y \rightarrow X$ , que aproxime puntualmente al operador inverso  $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$ . Por lo cual necesitamos conocer la teoría básica de la regularización.

### 3.5. Regularización.

El problema de reconstrucción de imágenes con pérdida de información es un problema mal planteado, por lo que es necesaria una estrategia de regularización para dar solución al problema, la cual nos va permitir construir una solución aproximada estable, debido a que ningún método matemático puede hacer estable un problema inestable.

Por un lado tenemos que muchos de los problemas inversos pueden ser planteados operacionalmente como:

$$Kx = y,$$

donde  $K : X \rightarrow Y$  un operador (que puede ser lineal o no lineal), y  $X, Y$  espacios normados, luego el objetivo de implementar una estrategia de regularización es encontrar una aproximación  $x^\delta$ , a la solución exacta  $x$ ; donde  $y^\delta$  es una perturbación de  $y$ , con un error pequeño tal que:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

Así, el objetivo es resolver la ecuación:

$$Kx^\delta = y^\delta.$$

Esto implica poder calcular una aproximación  $x^\delta$  de la solución exacta  $x$  de la ecuación  $Kx = y$  es decir, se desea que  $x^\delta$  dependa de manera continua de  $y^\delta$ . Por lo que nos interesa encontrar operadores lineales y acotados  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  que aproximen puntualmente al operador inverso no acotado  $K^{-1}$ .

**Definición 3.6.** Una estrategia de regularización es una familia de operadores lineales y acotados

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \quad \alpha > 0,$$

tales que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha T u = u, \quad \forall u \in X;$$

es decir, el operador  $R_\alpha T$  converge puntualmente a la identidad ([7]).

**Teorema 3.7.** Sea  $R_\alpha$  una estrategia de regularización para un operador compacto  $T : X \rightarrow Y$  donde la  $\dim X = \infty$ . Entonces se concluye:

- Los operadores  $R_\alpha$  no son uniformemente acotados con respecto a  $\alpha$ ; esto es, existe una sucesión de  $\alpha_j \rightarrow 0$  tal que  $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .
- La familia de operadores  $R_\alpha T x$  no converge uniformemente sobre subconjuntos acotados de  $X$ ; es decir, no existe una convergencia  $R_\alpha T$  a la identidad en la norma del operador.

**Definición 3.8.** Una estrategia de regularización  $\alpha = \alpha(\delta)$  es llamada admisible si  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  y

$$\sup \{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| : y^\delta \in Y, \|Kx - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

para cada  $x \in X$ .

Los métodos de regularización empleados son los métodos de regularización estándares o numéricos y el método de regularización de Tikhonov, uno de los más empleados para la solución de sistemas lineales mal planteados y problemas lineales de mínimos cuadrados. Una característica de los métodos de regularización, para problemas de minimización por mínimos cuadrados es el parámetro de regularización, el cual se encarga de controlar el peso dado a la minimización, es decir, busca disminuir el error de minimización y regularización.

### 3.6. Regularización por variación total.

La regularización por variación total (VT) es un problema variacional, donde la solución al problema consiste en la minimización de un funcional, que en nuestro caso es la variación total de una imagen, lo que nos ayuda a encontrar una aproximación a la imagen original. Es decir, en nuestro problema tenemos una imagen dañada  $u_0$  y necesitamos encontrar una imagen  $u$  la cual va ser similar a  $u_0$  pero con menor variación total.

La forma más general de analizar un problema es en su forma continua, debido a que la solución del problema es independiente de la discretización del problema o del algoritmo numérico que se emplee para su solución, razón por la cual empleamos el método de regularización por variación total en su forma continua. La variación total para una imagen  $u$  se define como el operador:

$$VT(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto}, \quad (5)$$

donde  $u$  se define sobre el dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . El uso de la variación total como un término de regularización en problemas de imágenes es motivado por su capacidad para recuperar las discontinuidades de la imagen, lo que justifica su uso en diferentes campos del procesamiento de imágenes como la eliminación de ruido, el flujo óptico, la restauración de imágenes, reconstrucción de imágenes en dominios perdidos que es un proceso para restaurar pérdidas de información, o remover objetos señalados en la imagen, para HSI (tono, saturación, intensidad) se utiliza al momento de descomprimir una imagen, para cubrir los detalles perdidos al momento descomprimir una imagen hiperespectral<sup>1</sup>, reconstrucción de superficie, segmentación, entre otros. La variación total tiene propiedades de semi-continuidad, convexidad y homogeneidad, lo cual es útil al definir su minimización.

Las características más importantes de la regularización por variación total son ([15]):

- Preserva las ubicaciones de los bordes.
- El cambio de intensidad es inversamente proporcional a la escala de las características locales, razón por la cual la variación total puede eliminar el ruido en regiones pequeñas sin alterar las características de una escala mayor, pues es independiente de la intensidad original y es directamente proporcional al parámetro de regularización.
- Afecta de manera local las características de la imagen, lo que implica el desarrollo de algoritmos numéricos eficientes, lo cual disminuye los costos computacionales.

La regularización por variación total consiste en la minimización del funcional (5).

En el capítulo siguiente, desarrollaremos el método de variación total como un método de regularización del problema de dominios perdidos, empezando con la explicación de lo que es la reconstrucción de dominios perdidos de imágenes y cuales imágenes son las que abarca el problema, posteriormente plantearemos el problema y lo resolveremos utilizando los conceptos revisados en este capítulo.

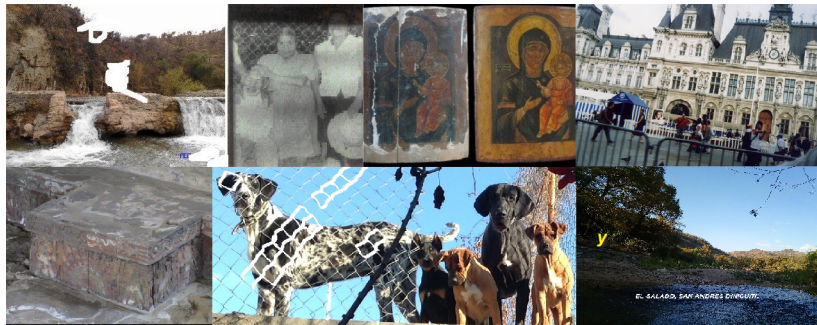
<sup>1</sup>Son las imágenes en las que se mide un espectro continuo para cada píxel, que consiste en recopilar y procesar información a lo largo de todo el espectro electromagnético.

#### 4. Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes.

En este capítulo desarrollamos el análisis del problema de reconstrucción de dominios perdidos en imágenes, lo cual nos conduce al problema de la ecuación de Euler-Lagrange con condición de frontera de Neumann.

##### 4.7. Imágenes con dominios perdidos.

El problema de la reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, comúnmente conocido como el problema de inpainting, consiste en estimar la recuperación de las partes dañadas o faltantes  $D$ , a partir de la información disponible en la imagen digital conocida  $u_0$ ; esto es:  $D \subset u_0 \subset \mathbb{R}^d$ . Dicho problema lo encontramos en la pintura, en una estructura, en una fotografía, entre otras, las cuales pueden perder información de alguna o varias de sus regiones, generada por diversos factores como: el tiempo, al dejar caer algún líquido, al escribir sobre ellas, por un lente sucio, al agrietarse o al agregar o quitar objetos, por lo que el objetivo es recuperar o completar la información perdida. La Figura 2 muestra un conjunto de imágenes con el problema de inpainting, donde podemos observar imágenes con regiones faltantes, las cuales se generaron por factores como: la captura, el deterioro por tiempo, al tener texto o por la obstrucción de objetos.



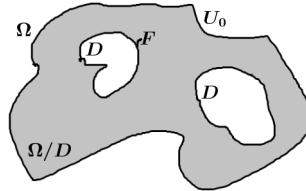
**Figura 2.** En esta imagen podemos observar imágenes con regiones faltantes, es decir con el problema de dominios perdidos. Fuente: Elaboración propia.

En el problema de dominios perdidos, no existe información dentro del área dañada, por lo que una manera de recuperar la información, es a través de su frontera. Por esta razón, empleamos el método de variación total, ya que nos permite recuperar los bordes.

El problema de inpainting consiste en encontrar la geometría y textura faltante, razón por la cual los métodos de inpainting se clasifican en dos grupos: los basados en la textura y los basados en la geometría, que emplean métodos de EDP o métodos variacionales para la solución del problema. Los métodos variacionales son de nuestro interés debido a que podemos modelar a la imagen como una función con cierto grado de suavidad, expresado en términos de las curvas de nivel o de la variación total de la imagen; una característica es que de entre todos los datos disponibles de la imagen, solo se utiliza la información de la frontera del dominio de inpainting para su restauración.

Una imagen  $u_0$  con el problema de inpainting se puede dividir en dos partes: la parte sin información  $D$  y la parte con información  $\Omega/D$ , como podemos observar en la Figura 3,

donde  $\Omega$  representa el dominio de  $u_0$ ,  $D$  la región dañada o faltante en la imagen, que llamaremos el dominio de inpainting  $D \subset \Omega$  y  $F$  la frontera entre  $\Omega/D$  y  $D$ .



**Figura 3.** Representación de las regiones presentes en una imagen con el problema de dominios perdidos. Fuente: Elaboración propia.

Los métodos matemáticos de inpainting generalmente emplean la discretización de un modelo continuo, y en general se realizan mediante una discretización puntual.

Un buen modelo de inpainting debe ser ([3]):

- I Local. Esto quiere decir que el dominio de inpainting puede ser recuperado solo con la vecindad del mismo y no requiere de un aprendizaje global.
- II Debe restaurar bordes rotos y suaves. Debido a que los bordes son importantes en el reconocimiento de objetos y en la segmentación de la imagen.
- III Evitar el ruido. Así es más fácil detectar características y restaurar la imagen.

#### 4.8. Modelo matemático del problema de inpainting.

Nosotros estamos interesados en reconstruir imágenes con el problema de inpainting, donde una imagen deteriorada es aquella que presentan regiones sin información, por lo que el objetivo es recuperar o completar la información perdida. Y una forma de lograr el objetivo es plantear el problema de manera matemática como desarrollaremos a continuación.

Consideremos dos imágenes digitales  $u$  y  $u_0$ , donde  $u$  representa la imagen original y  $u_0$  la imagen con regiones faltantes, es decir, sin toda la información de la imagen  $u$ .

Supongamos que conocemos la imagen  $u_0$ , que de aquí en adelante es el dato conocido del problema; así, el problema consiste en reconstruir la imagen  $u$  a partir del conocimiento de la imagen  $u_0$ .

De manera general, no es posible saber los factores que ocasionaron la pérdida de información en la imagen  $u$ ; así, para poder plantear el problema, debemos considerar un operador  $T$  que represente el efecto de la pérdida de información ocasionado sobre la imagen  $u$ , de tal forma que la imagen obtenida al aplicar el operador  $T$  sobre  $u$  sea la imagen  $u_0$  con regiones faltantes. Teóricamente lo anterior se puede escribir como:

$$Tu = u_0. \quad (6)$$

Así, la ecuación (6) genera el planteamiento de dos problemas: un problema directo que consiste en obtener a  $u_0$  a partir del conocimiento del operador  $T$  y de la imagen original

$u$ ; y un problema inverso el cual consiste en encontrar la imagen  $u$ , que satisfaga la ecuación (6), a partir del conocimiento de la imagen  $u_0$  y del operador  $T$ . Nosotros nos enfocaremos en resolver el problema inverso.

De la definición 2.1 tenemos que las imágenes digitales  $u$  y  $u_0$  se pueden ver como funciones de dos variables  $u(x, y)$  y  $u_0(x, y)$ , donde  $u$  pertenece al espacio normado  $X$  y  $u_0$  pertenece al espacio normado  $Y$ , tal que el operador  $T$  relaciona los espacios de funciones  $X$  e  $Y$ . Observemos que el operador  $T$  debe ser un operador lineal e invariante en el espacio, debido a que de esta forma se conservan las características de las imágenes con pérdida de información.

Por ejemplo, si se da un cambio de escala en la imagen  $u$ , nos interesa que al aplicar el operador  $T$  sobre  $u$  se obtenga una imagen  $u_0$  con el efecto de pérdida de información en la misma escala que la imagen original; además no debe importar como descomponemos a una imagen ya que el resultado de aplicar  $T$  a cada una de sus partes da como resultado la imagen con regiones perdidas, también no debe afectar si desplazamos el origen  $(x, y)$  de la imagen original  $u$ ,  $(\alpha, \beta)$  unidades, al aplicar el operador  $T$  sobre la imagen desplazada  $u(x - \alpha, y - \beta)$  obtendremos la imagen  $u_0$  con el efecto de pérdida de información desplazada las mismas unidades, es decir no se modifican los valores de las tonalidades.

Todas las características descritas del operador  $T$  se pueden escribir teóricamente de la forma siguiente: Propiedad de homogeneidad:

$$T \{au(x, y)\} = aT \{u(x, y)\}, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (7a)$$

Propiedad de aditividad:

$$T \{u_1(x, y) + u_2(x, y)\} = T \{u_1(x, y)\} + T \{u_2(x, y)\}, \quad (7b)$$

donde  $u_1(x, y)$  y  $u_2(x, y)$  son imágenes. Propiedad de invarianza de desplazamiento:

$$T \{u(x - \alpha, y - \beta)\} = u_0(x - \alpha, y - \beta), \quad (7c)$$

para cualquier  $(x, y)$  y cualquier  $(\alpha, \beta)$ . Una vez definidas las propiedades del operador  $T$  lo siguiente es obtener su expresión, así que para seguir nos apoyaremos de la distribución Delta de Dirac en su forma bidimensional, la cual define como:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = y = 0; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (8)$$

y tiene las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad (9a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = F(x, y), \quad (9b)$$

para cualquier función continua  $F(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \beta) \in X$ . La propiedad (9b) nos permite expresar la imagen  $u(x, y)$  en términos de la delta de Dirac como:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (10)$$

Así, aplicando el operador  $T$  a la expresión  $u(x, y)$  dada en (10) se tiene:

$$T\{u(x, y)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta\right\} = u_0(x, y), \quad (11)$$

dado que el operador  $T$  y el operador integral son lineales; por la propiedad de aditividad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T\{u(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta, \quad (12)$$

luego  $u(\alpha, \beta)$  es un escalar debido a que es independiente de  $x$  y  $y$ , y por la propiedad de homogeneidad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta)T\{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta, \quad (13)$$

donde el término  $T\{\delta(x - \alpha, y - \beta)\}$  nos indica como afecta el impulso en el punto  $(\alpha, \beta)$  al aplicar el operador  $T$ , dando como resultado una función  $t$ , lo cual se define como:

$$T\{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} = t(x - \alpha, y - \beta). \quad (14)$$

De esta manera, podemos reescribir la ecuación (12) como:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta)t(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta. \quad (15)$$

La cual nos permite obtener la imagen  $u_0$  con regiones faltantes, además la ecuación (15) es una integral de Fredholm de primer tipo; y como vimos en el Ejemplo 3.5, este es un problema mal planteado.

Como se ha mostrado, el operador  $T$  se puede escribir como:

$$Tu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta)t(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta, \quad (16)$$

luego, podemos reescribir la ecuación (15) de la forma:

$$Tu = u_0. \quad (17)$$

Así, lo que hemos obtenido hasta ahora, es el planteamiento operacional del problema de dominios perdidos en imágenes; que es un problema mal planteado en sentido de Hadamard. Se sabe que el problema de unicidad de la solución se puede resolver con buscar en subespacios de  $X$ , y el problema de existencia se puede resolver con buscar a la solución en espacios  $X'$  tales que  $X \subset X'$ . Sin embargo, los problemas de estabilidad no se pueden resolver mediante este tipo de consideraciones, razón por la que se debe analizar desde el punto de vista de la teoría de regularización. De aquí la necesidad de implementar una estrategia de regularización definida en (3.6), lo que permite al problema satisfacer la condición de estabilidad, dada en la Definición 3.4, y de esta forma obtener una solución aproximada a la solución del problema. Nuestro objetivo teóricamente es encontrar la solución  $u$  de la ecuación (17) con  $T$  un operador compacto y uno a uno. La inyectividad de  $T$  nos dice que la solución es única.

#### 4.9. Regularización para el problema de inpainting.

Supongamos que  $u_0 \in \text{Rango}(T)$  y  $T$  es invertible, al aplicar  $T^{-1}$  a ambos lados de la ecuación (17) tenemos:

$$u = T^{-1}u_0,$$

de donde  $u$  es la solución exacta, lo cual ocurriría si  $u_0(x, y)$  estuviera libre de ruido. Sin embargo, en la práctica  $u_0$  va acompañada de un ruido  $r(x, y)$ , lo que nos lleva a definir  $u_0^\delta(x, y) = u_0(x, y) - r(x, y)$ , así el problema que debemos resolver es:

$$Tu = u_0^\delta, \quad (18)$$

si suponemos que  $u_0^\delta \in \text{Rango}(T)$ , al aplicar  $T^{-1}$  a ambos lados de la ecuación (18) tenemos:

$$u = T^{-1}u_0^\delta,$$

pero, debido a que el problema es mal planteado, esta solución estará alejada de la solución exacta  $u$ , por ello, considerando el dato con error  $u_0^\delta$  nosotros queremos construir una aproximación  $u^\delta$  a la solución exacta  $u$  de la ecuación (17). Así en lugar de resolver la ecuación (17), lo que necesitamos resolver, es la ecuación:

$$Tu^\delta = u_0^\delta. \quad (19)$$

En general  $T$  no es invertible o no es posible calcular su inversa; sin embargo, si  $T$  es invertible, al aplicar el operador inverso en ambos lados de la ecuación (19) nos queda:

$$u^\delta = T^{-1}u_0^\delta, \quad (20)$$

de tal forma que la mejor solución que podemos encontrar a la solución exacta  $u$  es una aproximación  $u^\delta$ , que sea estable, es decir, que  $u^\delta$  dependa de manera continua de  $u_0^\delta$ . Donde el error en los datos es a lo más  $\delta$ , es decir:

$$\|u_0 - u_0^\delta\| \leq \delta. \quad (21)$$

Por tanto, de manera intuitiva, el objetivo es construir una estrategia de regularización; esto significa encontrar operadores  $R : Y \rightarrow X$ , lineales y acotados es decir que sean continuos, tales que sean invertibles y que  $R_\alpha$  converja al operador  $T^{-1}$  de manera puntual. Una característica a resaltar es que resolveremos un problema bien planteado en sentido de Hadamard. Si consideramos que  $u_\alpha^\delta := R_\alpha u_0^\delta$  es la mejor solución al problema bien planteado (19), entonces podemos escribir el error de aproximación de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta - u\| &= \|R_\alpha u_0^\delta - u\| \\ &= \|R_\alpha u_0^\delta - R_\alpha u_0 + R_\alpha u_0 - u\| \\ &= \|R_\alpha(u_0^\delta - u_0) + R_\alpha u_0 - u\| \end{aligned}$$

por desigualdad triangular:

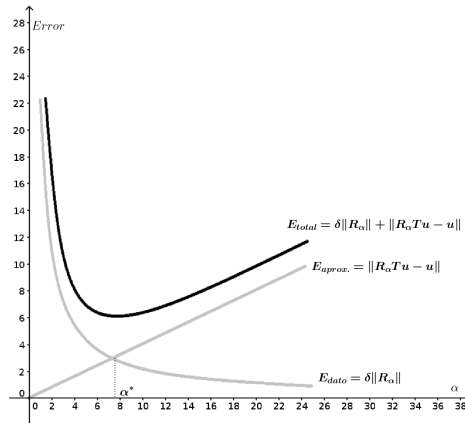
$$\begin{aligned} &\leq \|R_\alpha(u_0^\delta - u_0)\| + \|R_\alpha u_0 - u\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \|u_0^\delta - u_0\| + \|R_\alpha T u - u\| \end{aligned}$$

luego por (21):

$$\|u_\alpha^\delta - u\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|,$$

que es la estimación fundamental, lo que significa que el error en la solución siempre va estar acotado por ese término. Así el error total entre la solución exacta y la aproximada es la suma de dos errores: el primer término  $\delta \|R_\alpha\|$  es el error cometido en los datos, luego por Teorema 3.7  $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$  y el segundo  $\|R_\alpha T u - u\|$  es el error de la aproximación entre  $u_\alpha^\delta$  y  $u$ , luego por definición de estrategia de regularización este término tiende a 0 cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , como podemos observar en la Figura 4. Así, para la mejor aproximación  $u_\alpha^\delta$  de  $u$  necesitamos un  $\alpha$  pequeño y por otro lado la estabilidad requiere un  $\alpha$  grande, entonces necesitamos una estrategia para elegir  $\alpha = \alpha(\delta)$  de tal manera que el error total sea el menor posible, como podemos observar en la Figura 4,  $\alpha^*$  en la intersección es el óptimo, el cual permite alcanzar el mínimo de la función, por lo que  $\alpha^*$  es el parámetro de regularización; así la mejor elección del  $\alpha$  es aquella que minimice:

$$\delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|. \quad (22)$$



**Figura 4.** Representación del comportamiento del error total, como función de  $\alpha$ .

Dada una estrategia de regularización, queremos encontrar una solución regularizada que esté cerca de la solución exacta, es decir que el error entre la solución regularizada y la solución exacta sea el menor posible.

Luego el método de regularización empleado es el de la regularización variacional, donde la solución regularizada  $u_\alpha^\delta$  es la que minimiza el funcional definido como:

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{F}(Tu, u_0^\delta) + \alpha \mathcal{R}(u), \quad (23)$$

donde  $\mathcal{F}$  representa el término de proximidad de los datos, es decir, es el error de la aproximación entre  $u_\alpha^\delta$  y  $u$ ,  $\alpha > 0$  es el parámetro de regularización y  $\mathcal{R}$  representa el término de regularización el cual penaliza las propiedades de la imagen  $u$ , es decir es la influencia del ruido en los datos, de tal forma que se preserven las esquinas y bordes, lo cual dependerá de la elección de la norma.

El nombre de cada método empleado en la solución del problema, se relaciona con la elección de la norma. Nosotros emplearemos la regularización por variación total por

las razones mencionadas en la sección 3.6. Una de las estrategias de regularización más empleadas es la de Tikhonov ([7]).

En conclusión, para resolver el problema de inpainting, consideraremos  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal y acotado y  $u_0 \in Y$ , se quiere determinar  $u \in X$  que minimice el funcional de Tikhonov definido como:

$$J_\alpha(u) = \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|^2. \quad (24)$$

La desventaja de emplear el funcional dado en (24), es que penaliza las discontinuidades de la imagen; por esta razón, y por las propiedades del gradiente, se cambia la norma  $L^2(\Omega)$  en el término de regularización del funcional de Tikhonov por la norma de variación total, permitiendo plantear la minimización del funcional de regularización por variación total:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|_{VT}, \quad (25)$$

que es la propuesta de Rudin, Osher y Fatemi, la cual se emplea en el problema de eliminación de ruido en una imagen, y en la solución del problema de dominios perdidos, con la diferencia de la definición de su dominio. Así, el funcional a minimizar es:

$$J_\alpha(u) = \frac{\lambda_D}{2} \|Tu - u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{VT}, \quad (26)$$

donde  $\lambda_D$  se define como:

$$\lambda_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D; \\ 1, & \text{si } x \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

$\Omega$  representa el dominio de la imagen,  $D$  la región faltante y  $\Omega \setminus D$  la región con información de la imagen como podemos observar en la Figura 3. Lo cual permite plantear el problema sólo en el dominio perdido y eliminar el ruido al mismo tiempo en toda la imagen. La ecuación (26) se puede describir en término de la definición de las normas como:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |Tu - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy. \quad (27)$$

Luego, nuestro problema consiste en encontrar  $u$  que minimice el funcional definido en la ecuación (27).

#### 4.10. Reducción del problema a la ecuación de Euler-Lagrange.

El funcional que deducimos en la expresión (27) define la estrategia de regularización por variación total para el problema de inpainting. Una vez planteado el funcional a minimizar, debemos hallar su mínimo. Para ello, calcularemos su primera variación (Definición 3.3). Sea  $\omega(x, y)$  una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto en  $\Omega$  la cual representa la dirección en la que nos movemos y sea  $\varepsilon$  un escalar cualquiera. La primera variación del funcional  $J_\alpha(u)$  en el punto  $u$  y la dirección  $\omega$  se define como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_\alpha(u + \varepsilon\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy \right\} = 0,$$

Por un lado tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy \\ &= \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(T(u + \varepsilon\omega) - u_0) \omega dx dy \\ &= \lambda_D \int_{\Omega} (Tu - u_0) \omega dx dy. \end{aligned}$$

y por otro que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} \sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2} dx dy && \text{Por definición} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_{\Omega} \frac{(u_x + \varepsilon\omega_x)\omega_x + (u_y + \varepsilon\omega_y)\omega_y}{\sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2}} dx dy && \text{Derivando} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{u_x\omega_x + u_y\omega_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} dx dy && \text{Evaluando} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy && \text{Reescribiendo} \end{aligned}$$

Considerando a  $F = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  y  $f = \omega$  una función escalar, por la identidad vectorial  $\operatorname{div} f F = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$  tenemos que:

$$\operatorname{div} \left( \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \omega;$$

despejando:

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \omega = \operatorname{div} \left( \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Por lo que:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (28)$$

Como podemos observar, en la primera integral de lado derecho de la igualdad tenemos un campo sobre una región acotada  $\Omega$ , por lo que podemos aplicar el teorema de la divergencia  $\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot n ds$ , así podemos reescribir la expresión (28) como:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot n ds - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (29)$$

Por definición tenemos que  $\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n}$  luego, si consideramos la condición:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

entonces la igualdad (29) se reduce a:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = -\alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy; \quad (30)$$

por lo tanto la primera variación de  $J_{\alpha}$  en el punto  $u$  y la dirección  $\omega$  es:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_{\alpha}(u + \varepsilon \omega) = \int_{\Omega} \lambda_D (Tu - u_0) \omega dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (31)$$

Una condición necesaria para que el funcional  $J_{\alpha}(u)$  tenga un mínimo es que la primera variación en  $u$  sea igual a cero, es decir:

$$\int_{\Omega} \left( \lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \omega dx dy = 0; \quad (32)$$

y como es para cualquier  $\omega$  en  $\Omega$ , de la expresión (32), tenemos que:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0; \quad (33)$$

la cual es la ecuación de Euler-Lagrange.

Por lo que, encontrar el mínimo del funcional  $J_{\alpha}(u)$  es equivalente a encontrar la solución del problema de contorno siguiente:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0, \quad (34)$$

con la condición,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

también conocido como el problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange. En el capítulo siguiente desarrollaremos un método numérico para resolver la ecuación (34), para lo cual elegimos el método iterativo explícito de Euler, debido a su fácil implementación, y aunque no es el mejor método para la solución, si nos ayuda a comprender el desarrollo de nuestro trabajo, además, otra razón es que una vez comprendido este método se puede implementar métodos mas eficientes, los cuales son generados a partir del análisis de este método.

## 5. Solución numérica.

En este capítulo resolveremos numéricamente la ecuación (34), aplicando el método iterativo explícito de Euler también conocido como: método de descenso de gradiente o método de marcha en el tiempo. Dicho método pertenece a los métodos basados en el gradiente, donde la característica es la de emplear la información sobre la derivada permitiendo generar algoritmos eficientes. Para dar solución a la ecuación (34) de manera numérica primero necesitamos discretizar la ecuación.

### 5.11. Discretización del problema de contorno.

Para comenzar, construimos una malla del dominio  $\Omega$  de la imagen con puntos discretos, donde cada nodo, se define por las coordenadas  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq M$  y  $0 \leq j \leq N$ ; luego en una imagen digital, el tamaño de los píxeles es el mismo, así consideramos que el tamaño de la partición  $h$  es una unidad y el tamaño de la malla se determina por el tamaño de la imagen, es decir de  $M \times N$ .

Consideremos  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el campo vectorial tal que:

$$\phi = \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

De la definición del operador divergencia, tenemos que:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Lo siguiente es aproximar cada una de las derivadas parciales, para lo cual emplearemos el método de diferencias finitas, por definición de diferencia centrada en el punto  $(x_i, y_j)$  ([4]) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+\frac{h}{2}}, y_j) - u(x_{i-\frac{h}{2}}, y_j)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j+\frac{h}{2}}) - u(x_i, y_{j-\frac{h}{2}})}{h}.$$

Para simplificar la notación consideraremos  $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ . Así para el píxel en el par ordenado  $(i, j)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &\approx \frac{\left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{h}{2},j} - \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{h}{2},j}}{h} \\ &\approx \frac{\frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &\approx \frac{\left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{h}{2}} - \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{h}{2}}}{h} \\ &\approx \frac{\frac{1}{|\nabla u|_{i,j+\frac{h}{2}}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} - \frac{1}{|\nabla u|_{i,j-\frac{h}{2}}} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{|\nabla u|_{i,j+\frac{h}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i,j-\frac{h}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right). \end{aligned}$$

Además, de la definición del módulo del gradiente tenemos:

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Por lo que:

$$|\nabla u|_{i \pm \frac{h}{2}, j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i \pm \frac{h}{2}, j}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i \pm \frac{h}{2}, j}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{u_{i \pm 1, j} - u_{i, j}}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i, j \pm 1} - u_{i, j}}{h}\right)^2},$$

así:

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i \pm \frac{h}{2}, j}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i \pm 1, j} - u_{i, j})^2 + (u_{i, j \pm 1} - u_{i, j})^2}}$$

y

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i, j \pm \frac{h}{2}}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i \pm 1, j} - u_{i, j})^2 + (u_{i, j \pm 1} - u_{i, j})^2}},$$

Luego tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\sqrt{(u_{i+1, j} - u_{i, j})^2 + (u_{i, j+1} - u_{i, j})^2}} - \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{\sqrt{(u_{i, j} - u_{i-1, j})^2 + (u_{i, j+1} - u_{i, j})^2}} \right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{\sqrt{(u_{i+1, j} - u_{i, j})^2 + (u_{i, j+1} - u_{i, j})^2}} - \frac{u_{i, j} - u_{i, j-1}}{\sqrt{(u_{i, j} - u_{i-1, j})^2 + (u_{i, j} - u_{i, j-1})^2}} \right).$$

Finalmente se tiene que:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{u_{i+1, j} + u_{i, j+1} - 2u_{i, j}}{\sqrt{(u_{i+1, j} - u_{i, j})^2 + (u_{i, j+1} - u_{i, j})^2}} - \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{\sqrt{(u_{i, j} - u_{i-1, j})^2 + (u_{i, j+1} - u_{i, j})^2}} \right. \\ \left. - \frac{u_{i, j} - u_{i, j-1}}{\sqrt{(u_{i, j} - u_{i-1, j})^2 + (u_{i, j} - u_{i, j-1})^2}} \right).$$

Por otra parte, la condición de frontera de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , nos permite definir las condiciones que se deben cumplir en los píxeles del contorno de la imagen digital.

Para ello, de la aproximación de la derivada normal dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{h}, \quad (35)$$

se sigue que el contorno formado por los píxeles de la forma  $(0, j)$ ,  $0 \leq j \leq N$  cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{1, j} - u_{0, j}}{h} = 0 \quad \text{entonces} \quad u_{1, j} = u_{0, j}.$$

Análogamente, para la frontera inferior de la imagen, formada por el conjunto de píxeles de la forma  $(i, 0)$ , se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,1} = u_{i,0},$$

para el lado formado por el conjunto de píxeles  $(M, j)$  se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{M-1,j} - u_{M,j}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{M-1,j} = u_{M,j};$$

y para el contorno superior formado por el conjunto de píxeles  $(i, N)$  se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,N-1} - u_{i,N}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}.$$

Por lo anterior, podemos decir que la condición de frontera de Neumann se expresa como:

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}. \quad (36)$$

Así, lo que hemos obtenido es la discretización del problema de contorno (34), el cual se reescribe como:

$$\lambda_D (Tu_{i,j} - u_0) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j} = 0, \quad (37)$$

con la condición,

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}. \quad (38)$$

Lo siguiente, es dar solución a la ecuación mediante la implementación de un método iterativo. Podemos decir, que reconstruir una imagen con el problema de inpainting implica un proceso de cambio sobre la imagen, en un determinado tiempo, el cual inicia con la imagen dañada  $u_0(x, y)$  y termina con la mejor aproximación de la imagen  $u$ . Esto implica construir un conjunto de imágenes  $u^n(i, j)$  tal que  $u^0(i, j) = u_0(i, j)$  es la imagen dañada, en nuestro caso es la imagen con regiones faltantes; luego  $n = 0$  es el punto de partida, lo que significa que cada que aumente  $n$  se recupera información en la imagen, es decir si consideramos que  $u^n$  es la imagen con el problema de inpainting en el paso actual  $n$ , entonces la imagen siguiente es  $u^{n+1}$  de tal manera que en determinado momento se obtendrá la mejor solución a la forma dinámica de la ecuación (37), esto nos permite pensar en un método iterativo para resolver el problema, donde  $n$  denota el número de iteraciones, por lo que planteamos la forma dinámica de la ecuación (37) como :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) + \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (39)$$

con la condición inicial

$$u_{i,j}^0 = u_0(i, j). \quad (40)$$

El objetivo es encontrar la solución  $u$  que satisfaga la ecuación (39), la cual será la mejor aproximación a la imagen original. La ecuación (34) es igual a la ecuación (39) si y solo si  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , es decir se busca que la solución  $u$  obtenida mediante el método iterativo no tenga más cambios con respecto al tiempo, para que sea considerada como la solución al

problema inicial. Por otra parte tenemos que una discretización para  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en el momento  $n$  es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h},$$

luego la ecuación (39) se reescribe como:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h} = \lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) - \alpha \text{div}(\phi)_{i,j}^n,$$

la cual es equivalente a:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + h \left( \lambda_D (Tu_{i,j}^n - u_0) - \alpha \text{div}(\phi)_{i,j}^n \right) \quad (41)$$

con la condición de frontera:

$$u_{1,j}^n = u_{0,j}^n, \quad u_{i,1}^n = u_{i,0}^n, \quad u_{M-1,j}^n = u_{M,j}^n, \quad u_{i,N-1}^n = u_{i,N}^n. \quad (42)$$

Así con cada iteración obtendremos la solución óptima la cual será:

$$u_{i,j}^{n+1} = u^{n+1}(x_i, y_j), \quad (43)$$

que es la solución al problema de dominios perdidos, lo que significa que es la mejor aproximación a la imagen original.

## 6. Conclusiones.

Principalmente, en este artículo se logró analizar, describir y plantear el problema de imágenes con regiones faltantes, desde un punto de vista teórico y práctico, debido a la relación existente entre las matemáticas y la computación, se redactaron conceptos básicos para el desarrollo del trabajo.

Dada la naturaleza del problema, se describió el fundamento matemático para plantearlo como un problema inverso, el cual se pudo relacionar con la ecuación de Fredholm de primer tipo, esto permitió ejemplificar el mal planteamiento de un problema inverso, y así concluir que el problema de inpainting es mal planteado según Hadamard, por lo cual nos apoyamos de la teoría de regularización para su solución, eligiendo el método de variación total. Donde observamos las dificultades para obtener el parámetro de regularización y estas nos motivan a estudiar la elección de este parámetro en un futuro cercano.

Logramos plantear el método de regularización por variación total a partir de la representación variacional del método de regularización de Tikhonov.

Se hizo un análisis más detallado de la deducción del problema de regularización por variación total para el problema de dominios perdidos, donde el resultado obtenido coincide con el encontrado en la literatura, y del cual generalmente se inicia al estudiar el problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos.

De igual manera se logró detallar que encontrar el mínimo del funcional, es equivalente a encontrar la solución del problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange.

Se logró la implementación de un método variacional como un método de regularización del problema de reconstrucción de dominios perdidos de imágenes.

## Referencias

- [1] Aubert, Gilles, and Pierre Kornprobst., *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*, Vol. 147. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] Boyd, Stephen, Stephen P. Boyd, and Lieven Vandenbergh., *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [3] Chan, Tony F., and Jianhong Shen., *Image processing and analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [4] Domínguez Sánchez, Federico C., and Nieves Hurtado Antonio., *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, Grupo Editorial Patria, 2014.
- [5] Gonzalez, Rafael C., and Richard E. Woods., *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, Inc. 2006.
- [6] Herrera Terán, Maribel Kateryn., “ Métodos variacionales para la restauración de dominios perdidos de imágenes y su resolución numérica mediante métodos de segundo orden”, BS Tesis, Quito: EPN, 2015, 110 p.
- [7] Kirsch, Andreas., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, AVol. 120. Springer Science & Business Media, 2011.
- [8] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi., “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, *Physica D*, 1992, 60(1-2):259-268.
- [9] Luenberger, David G., and Yinyu Ye., “Linear and Nonlinear Programming Fourth Edition”, (2016).
- [10] Pratt, William K., *Introduction to Digital Image Processing*, CRC Press 2013.
- [11] Rainer Kress., *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences 82: Springer. 2010.
- [12] R.F. Hoskins., *Delta Functions Introduction to Generalised Functions*, Woodhead Publishing. 2009.
- [13] Scherzer, Otmar., *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer Science & Business Media, 2015.
- [14] Solomon, Chris, and Toby Breckon., *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*, John Wiley & Sons, Ltd 2011.
- [15] Strong, David, and Tony Chan., “ Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization”, *Inverse Problems* (2003), 165-188: IOP Publishing Ltd.